

九州大学 2023 理系第2問

$\alpha$  を実数とする。数列  $\{a_n\}$  が

$$a_1 = \alpha, a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められるとき、以下の問いに答えよ。

(1)  $\alpha \leq 1$  のとき、数列  $\{a_n\}$  の収束、発散を調べよ。

(2)  $\alpha > 2$  のとき、数列  $\{a_n\}$  の収束、発散を調べよ。

(3)  $1 < \alpha < \frac{3}{2}$  のとき、数列  $\{a_n\}$  の収束、発散を調べよ。

(4)  $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$  のとき、数列  $\{a_n\}$  の収束、発散を調べよ。

★  $a_{n+1} = f(a_n)$  の形の数列  $\{a_n\}$  の  
 極限のあたりの付け方.  
 → 数学Ⅲ特講・極限⑤

$y = f(x)$  と  $y = x$  のグラフを用いて、  
 $\{a_n\}$  の動きを追える!

★ 漸化式で与えられた数列の極限

→ (解けるなら解いて飛ばす  
 解けないなら工夫が必要.)

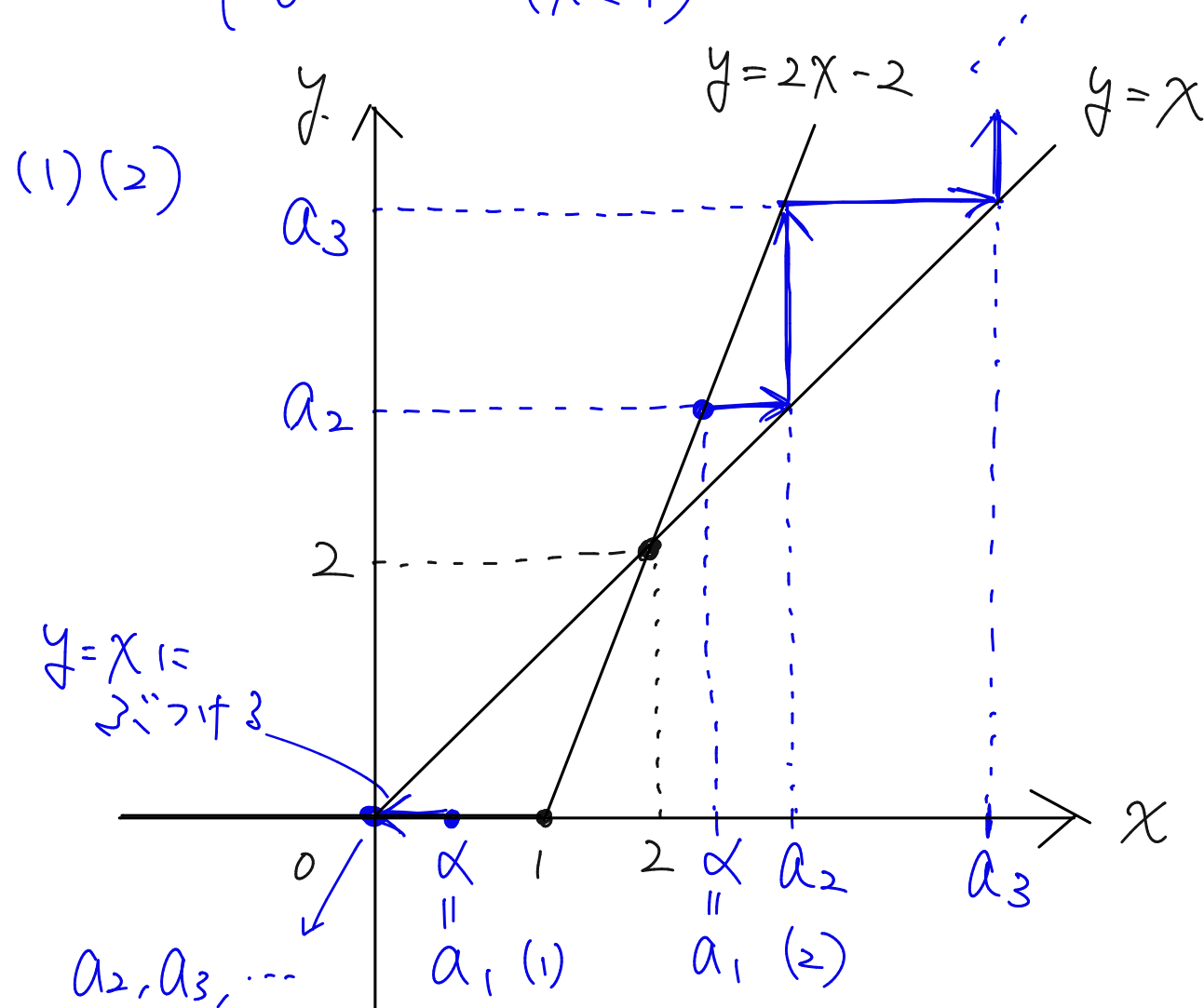
→ 今回は絶対値を取れば"解ける".

★ 初見での思考は前回の動画を参照.

まずはあたりをつける.

$y = |x-1| + x-1$  のグラフを考える.

$$y = \begin{cases} 2x-2 & (x \geq 1) \\ 0 & (x < 1) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha \leq 1 \text{ のとき,} \\ a_2 &= |\alpha - 1| + \alpha - 1 \\ &= -(\alpha - 1) + \alpha - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= |0 - 1| + 0 - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

1項前の値で  
決まるので、  
あとはくり返し

よって以後同様にして値は全て0  
になるので、数列  $\{a_n\}$  は  
0に収束する。

①  $r=4$  就可以了。

(2) あたりをつけたグラフから、  
どんどん大きくなって発散することを  
言えばOKそう。  
どんどん大きくなるなら常に値は  
2より大きい  $\rightarrow$  絶対値とれる  
 $\rightarrow$  一般項求められる!

「どんどん大きくなる」ことより

「2より大きい」ことの方が示しやすい。  
絶対値とれるので!

$\alpha > 2$  のとき、全ての  $n$  で  $a_n > 2$  と  
なることを示す。  $\rightarrow$  漸化式 + 全称命題  
は帰納法と相性◎

(i)  $n=1$  のとき  $a_1 = \alpha > 2$  より成立。

(ii)  $n=k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) のとき  $a_k > 2$  と仮定。

このとき、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= |a_k - 1| + a_k - 1 \quad \text{)} \text{外せろ!} \\ &= (a_k - 1) + a_k - 1 \\ &= 2a_k - 2 \\ &> 2 \times 2 - 2 = 2 \quad \text{より} \end{aligned}$$

$a_{k+1} > 2$  も成立。

よって (i)(ii) より全ての  $n$  で  $a_n > 2$  であることが示された。このとき漸化式は

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (a_n - 1) + a_n - 1 \quad \leftarrow \text{外せる!} \\ &= 2a_n - 2 \end{aligned}$$

となるので、一般項を求めると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2 &= 2(a_n - 2) \\ a_n - 2 &= 2^{n-1}(a_1 - 2) \end{aligned}$$

$$a_n = 2^{n-1}(\alpha - 2) + 2 \quad \text{となる。}$$

$\alpha > 2$  より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{n-1}(\alpha - 2) + 2) = \infty$$

となり、正の無限大に発散する。

(3) あたりをつけたグラフから、

$a_2$  が必ず 1 以下になることが  
わかる。 → あとは (1) と同じことが  
繰り返される!!

→ なので地道に具体化  
すればよさそう。

$1 < \alpha < \frac{3}{2}$  のとき、

$$a_2 = |\alpha - 1| + \alpha - 1 = 2\alpha - 2 \quad \alpha > 1 \text{ より外せる}$$

であり、

$$0 < 2\alpha - 2 < 1$$

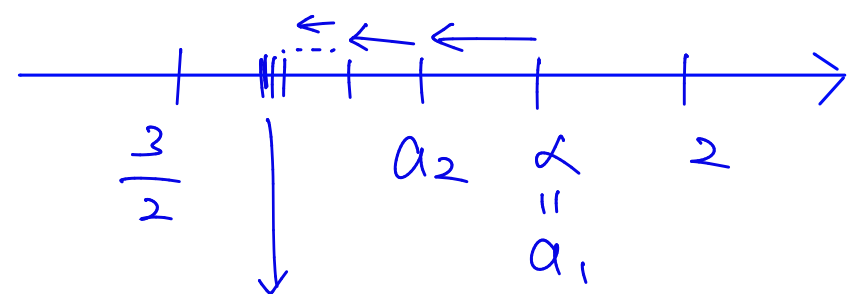
となるので、 $a_2 < 1$  である。

よって、(1) の議論と同様にして  
 $a_3$  以降の項の値は全て 0 となる  
ので、数列  $\{a_n\}$  は 0 に収束する。

(4) あたりをつけたグラフから、  
 値は小さくなっていき、  
どこかで必ず  $\frac{3}{2}$  未満になり、  
(1)や(3)と同じ状況になり、  
 0に吸い込まれていくことがわかる。  
 (1未満と考えると(1)につなけても  
 もろろん OK)

→ これもどう言うか??

→ 減っていくことを言えばいい?  
でもこれだけではダメ。 why?



$\frac{3}{2}$  より大きいところにも 収束する可能性!!

数列  $\{a_n\}$  の値がどこかで必ず  $\frac{3}{2}$  未満  
 となることを示す。→ すると(1)(3)より終了  
 ます。ある  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) について  
 $\frac{3}{2} \leq a_k < 2$  ならば、 ← この仮定は  
 絶対値を  
 とるため!

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= |a_k - 1| + a_k - 1 \\ &= (a_k - 1) + a_k - 1 \\ &= 2a_k - 2 \quad \text{より、} \end{aligned}$$

$$\underline{a_{k+1} - a_k = a_k - 2 < 0} \quad \text{となるので、}$$

増減を調べる

$$a_{k+1} < a_k \quad \text{となり} \quad \underline{\text{値は減少する。}}$$

あとは、 $\frac{3}{2}$  以上に留まり続けないうことを  
 言えば OK!!

→ 背理法が考えやすい。

ずっと  $\frac{3}{2}$  以上 2 未満だと、  
絶対値をとって一般項求められる。

→ (2) より  $a_n = 2^{n-1}(\alpha - 2) + 2$  なので、

$\alpha < 2$  のとき  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$

となり矛盾が示せそう。という流れ

ここで、数列  $\{a_n\}$  の値が全て  
 $\frac{3}{2}$  以上 2 未満と仮定する。



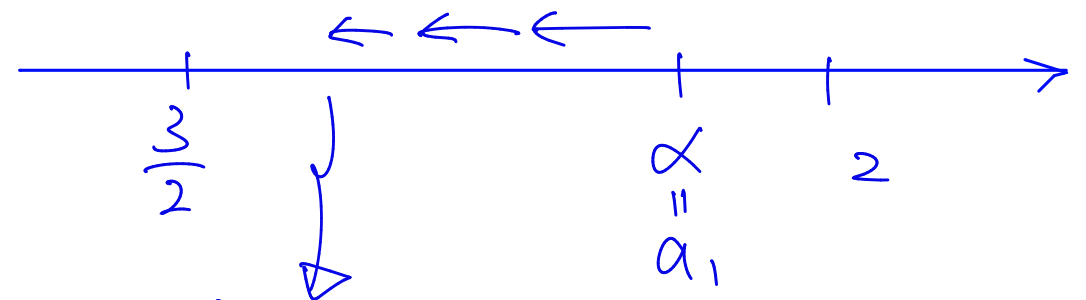
このとき、漸化式は

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= |a_n - 1| + a_n - 1 \\ &= 2a_n - 2 \quad \text{となり。} \end{aligned}$$

(2) の議論より  $a_n = 2^{n-1}(\alpha - 2) + 2$   
であるが、 $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$  より  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$   
となって矛盾する。← (★) に反する!!

よって、 $\frac{3}{2} \leq a_1 < 2$  と以上の議論を  
合わせると、数列  $\{a_n\}$  の値がどこかで  
必ず  $\frac{3}{2}$  未満となることが示される。

$\frac{3}{2}$  以上 2 未満に  
... いる限り減少



でも  $\frac{3}{2}$  以上 2 未満に  
留まることはない! → どこかで  $\frac{3}{2}$  未満  
になるしかない。

このとき、(1) および (3) の議論より、  
その後値が 0 に収束することが保証  
されるので、数列  $\{a_n\}$  は 0 に収束する。