

名古屋大学 2023 文系第1問

a を実数とし、2 つの関数 $f(x) = x^3 - (a + 2)x^2 + (a - 2)x + 2a + 1$ と $g(x) = -x^2 + 1$ を考える。

- (1) $f(x) - g(x)$ を因数分解せよ。
- (2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点が 2 個であるような a を求めよ。
- (3) a は (2) の条件を満たし、さらに $f(x)$ の極大値は 1 よりも大きいとする。
 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフを同じ座標平面に図示せよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & f(x) - g(x) \\
 &= x^3 - (a+2)x^2 + (a-2)x + 2a + 1 \\
 &\quad - (-x^2 + 1)
 \end{aligned}$$

$$= x^3 - (a+1)x^2 + (a-2)x + 2a$$

☆ 因数定理をまず試す

$$\begin{aligned}
 &= (x-a)(x^2 - x - 2) \\
 &= \underline{(x-a)(x+1)(x-2)} //
 \end{aligned}$$

(2) $f(x)$ は 3 次関数, $g(x)$ は 2 次関数 中え、
 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の 7"う7" の
 共有点の個数と、 $f(x) = g(x)$ の
異なる実数解の個数は等しい。
 ↳ なぜ??

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x+1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = a, -1, 2$$

なので、 $f(x) = g(x)$ の異なる実数解の
 個数が 2 個となるのは、

$$\underline{a = -1 \text{ 又は } 2} //$$

(3) 「 $f(x)$ の極大値 > 1 」で
 どちらかの a に決まるかな...
 ここをうろに見極めたいところ...

(i) $a = -1$ のとき

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1 \text{ となる。}$$

→ この増減を調べる。

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 3$$

$$= 3 \left(x - \frac{1+\sqrt{10}}{3} \right) \left(x - \frac{1-\sqrt{10}}{3} \right)$$

よって $f(x)$ の増減は

x	...	$\frac{1-\sqrt{10}}{3}$	...	$\frac{1+\sqrt{10}}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\textcircled{11}$	$\searrow$		$\nearrow$

極大値 求めるしかないか...

→ $f(x)$ を $f'(x)$ で割った余りに
代入すると少シラク!

ここで、 $f(x)$ を $f'(x)$ で割ると

$$x^3 - x^2 - 3x - 1 = (3x^2 - 2x - 3) \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \right) - \frac{20}{9}x - \frac{4}{3}$$

暗算でいけるとベスト!!

x^2 まで
そろそろ

となりので、極大値は

$$f\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) = -\frac{20}{9} \times \frac{1-\sqrt{10}}{3} - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{20\sqrt{10} - 56}{27}$$

$$\frac{20 \times 3.1 < 5.11 - 56}{27} \doteq \frac{6}{27} < 1$$

なので上から評価する.

$$< \frac{20 \times 4 - 56}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9} < 1$$

となり1より小さい。よって不適。

(ii) $a=2$ のとき、

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5 \quad \text{となる。}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

$$= 3x \left(x - \frac{8}{3} \right) \quad \text{より、}$$

$f(x)$ の増減は

x	...	0	...	$\frac{8}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	Ⓜ	↘		↗

となりので、極大値は

$f(0) = 5$ となり、1より大きく通る。

このとき、 $f(x) - g(x) = (x+1)(x-2)^2$

なので、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ を図示
すると、以下の通り。

$x=2$ で
接する!

