大阪大学 2022 理系第5問

座標平面において、t を媒介変数として

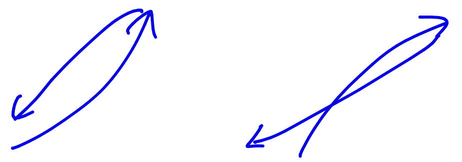
$$x = e^t \cos t + e^\pi,\ \ y = e^t \sin t \ \ (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする。

曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積を立式する上で必要な情報を得るためにグラフを書く！（だいたいでOK）

→ tに応じたxとyの増減をまずは考える。



とかあったらまた考える。

$$\frac{dx}{dt} = e^t\cos t + e^t(-\sin t)$$

$$= -\sqrt{2}\,\underbrace{e^t}_{>0}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

正負知るには積がよい。合成する。

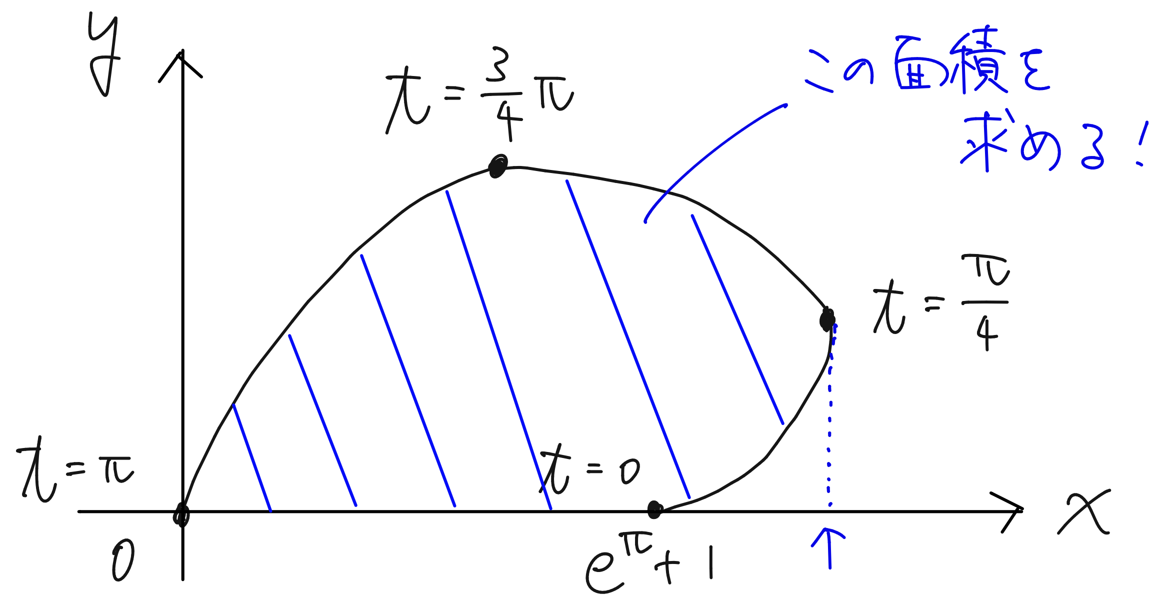
$$\frac{dy}{dt} = e^t\sin t + e^t\cos t$$

$$= \sqrt{2}\,e^t\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$ より，

$0 \leqq t \leqq \pi$ における x, y の増減は

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$		π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
x	$e^{\pi}+1$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

となるので，Cの概形は以下の通り。



特に$t=\frac{\pi}{4}$のときのxがきちゃないので、
文字でおいて進めていく。
→ あとでどうせtの積分にするし。

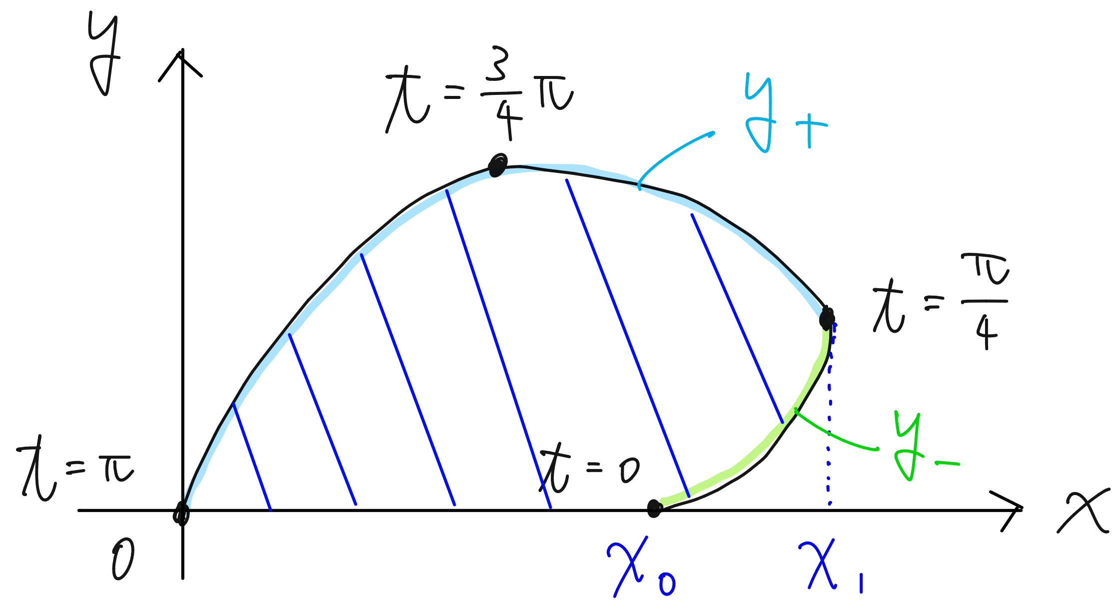
積分する関数は同じで、実は定積分をまとめられる。(処理の工夫!)

$t=0$のときのxをx_0, $t=\frac{\pi}{4}$のときのxをx_1とおく。さらに、

$$\begin{cases} \cdot\ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{4} \text{ に対応する } y \text{ を } y_- \\ \cdot\ \frac{\pi}{4} \leqq t \leqq \pi \quad \text{〃} \quad y_+ \end{cases}$$

とおく。←なぜ分ける??

$x_0 \leqq x < x_1$のとき、あるxに対応するyが2つあるため!



このとき、求める面積Sは

$$S=\int_0^{x_1} y_+\,dx-\int_{x_0}^{x_1} y_-\,dx$$ となる。

公式

→置換してtの式にして計算!

$dx=-\sqrt{2}e^t\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$ かつ、

y_+に関しては

x	$0 \to x_1$
t	$\pi \to \frac{\pi}{4}$

y に関しては

x	$x_0 \to x_1$
t	$0 \to \frac{\pi}{4}$

なので、

$$S = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} e^t \sin t \cdot \left(-\sqrt{2} e^t \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right) dt$$

$$- \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^t \sin t \cdot \left(-\sqrt{2} e^t \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right) dt$$

→ 区間をまとめられる!!

$$= \sqrt{2} \int_0^{\pi} e^{2t} \underline{\sin t \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)} dt$$

積和で1つに

あとは計算!

$$= \sqrt{2} \int_0^{\pi} e^{2t} \cdot \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\right) dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2t} dt}_{①} - \frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{\int_0^{\pi} e^{2t} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) dt}_{②}$$

分けて求めた方がミスしにくい。

ここで、①について

$$① = \left[\frac{1}{2} e^{2t}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2\pi} - 1\right)$$ と求められる。

② については、← 部分積分×2で同形出現でもいいが…

一気に不定積分求める方法もおさえておこう。

このコつのペアを作る

↓

$$\left(e^{2t} \underline{\underline{\sin}}\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \underline{2e^{2t} \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$+ \underline{2e^{2t} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\left(e^{2t} \underline{\underline{\cos}}\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \underline{2e^{2t} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$- \underline{2e^{2t} \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

足し引きすれば不定積分わかる!

より、足して4で割れば

$$e^{2t}\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(e^{2t}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)+e^{2t}\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)\right)'$$

↖積分できた！

を得るので、

$$② = \frac{1}{4}\left[e^{2t}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)+e^{2t}\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{1}{4}\left(e^{2\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$
$$=0$$ と求められる。

よって、 $S=\frac{1}{4}\left(e^{2\pi}-1\right)$ となる。

<別解>

$$\begin{cases} x = e^{t}\cos t + e^{\pi} \\ y = e^{t}\sin t \end{cases}$$ メンドいので平行移動する

Cをx軸方向に$-e^{\pi}$平行移動させた曲線の式は

$$\begin{cases} x = e^{t}\cos t \\ y = e^{t}\sin t \end{cases} \quad (0\leqq t\leqq\pi)$$

であり、この曲線をC'とすると、C'とx軸で囲まれた図形の面積を求めればよい。

→面積は同じ！

cosやsinと相性よい！

C'の式を極座標表示すると、

$$r=e^{\theta} \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$ となるので、

→ $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ で納得！

面積Sは

$$S = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$ ←あとで補足

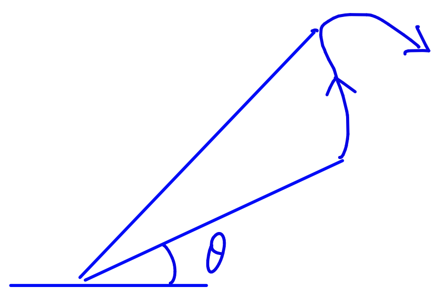
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{2\theta} \, d\theta$$ さっきの①

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2\pi} - 1\right)$$ と求められる.

〈極方程式の面積公式〉

$r=f(\theta)$ と表されるとき、

θに応じてrは1つずつ定まる.



とかない！

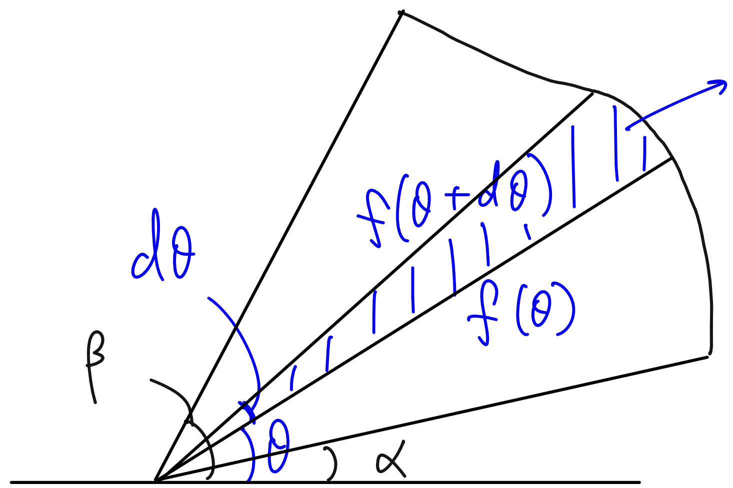
このとき、$r=f(\theta)$が表す曲線と

$\theta=\alpha, \beta$ で囲まれる図形の面積は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \underline{r^2} \, d\theta$$ で求められる。

$(f(\theta))^2$

イメージとしては.



この微小図形について

$d\theta$が十分小さいとき、

$f(\theta) \fallingdotseq f(\theta+d\theta)$

となり扇形に近似できて、面積は

$$\frac{1}{2} \cdot f(\theta) \cdot f(\theta) \cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

これを足し上げていけばOK！