

大阪大学 2023 理系第2問 / 文系第3問

平面上の 3 点 O, A, B が $|2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}| = 1$ かつ $(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}$ をみたすとする。

(1) $(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB})$ を求めよ。

(2) 平面上の点 P が

$|\overrightarrow{OP} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})| \leq \frac{1}{3}$ かつ $\overrightarrow{OP} \cdot (2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \leq \frac{1}{3}$ をみたすように動くとき、 $|\overrightarrow{OP}|$ の最大値と最小値を求めよ。

★図形的にいかか、ベクトルで"ゴリゴリ"変形するか (もしくは座標の話にするか) は常に意識を!

→ 図形的にとくにわからない.

$\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ はよ〜わからん

→ とりあえず"ベクトルで"ゴリゴリ変形

(1) この内積の値を求めよのに必要な材料

→ $|\vec{OA}|^2$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$, $|\vec{OB}|^2$

$$\rightarrow \begin{cases} |2\vec{OA} + \vec{OB}| = 1 \\ |\vec{OA} + 2\vec{OB}| = 1 \\ (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{の3式}$$

から手に入る!!

題意の条件より,

$$\begin{aligned} & \cdot \begin{cases} |2\vec{OA} + \vec{OB}| = 1 \\ |2\vec{OA} + \vec{OB}|^2 = 1 \\ 4|\vec{OA}|^2 + 4\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2 = 1 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \begin{cases} |\vec{OA} + 2\vec{OB}| = 1 \\ |\vec{OA} + 2\vec{OB}|^2 = 1 \\ |\vec{OA}|^2 + 4\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 4|\vec{OB}|^2 = 1 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \begin{cases} (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{3} \\ 2|\vec{OA}|^2 + 3\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

①~③を解くと

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } 3|\vec{OA}|^2 - 3|\vec{OB}|^2 = 0 \\ & |\vec{OA}| = |\vec{OB}| \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

これを①③に代入すると

$$\begin{cases} 5|\vec{OA}|^2 + 4\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1 & \dots \textcircled{1}' \\ 3|\vec{OA}|^2 + 3\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{1}{3} & \dots \textcircled{3}' \end{cases}$$

を得て、 $\textcircled{1}' \times 3 - \textcircled{3}' \times 4$ より

$$\begin{aligned} 3|\vec{OA}|^2 &= \frac{5}{3} \\ |\vec{OA}|^2 &= \frac{5}{9} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}'\text{より} \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{4}{9} \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\textcircled{4}\text{より} \quad |\vec{OB}|^2 = \frac{5}{9} \underline{\hspace{1cm}}$$

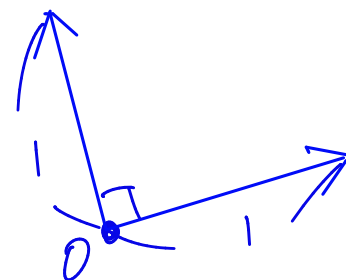
よって求める値は

$$\begin{aligned} & (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OB}) \\ &= 2|\vec{OA}|^2 + 5\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 2|\vec{OB}|^2 \\ &= 2 \times \frac{5}{9} + 5 \times \left(-\frac{4}{9}\right) + 2 \times \frac{5}{9} \\ &= \underline{\underline{0}} \quad \text{となる。} \end{aligned}$$

(2) (1)の結果が意味ありげ"でしかない
ので整理しておく。

(1)の結果と、 $|2\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} + 2\vec{OB}| = 1$
より、 $2\vec{OA} + \vec{OB}$, $\vec{OA} + 2\vec{OB}$ は 垂直で
ある。 ← じゃないことに留意!

→ 2つのベクトルが長さ1で垂直



この2つをベースに
直交座標を考えられる!

※ 前回の初見動画では、
 $2\vec{OA} + \vec{OB}$, $\vec{OA} + 2\vec{OB}$ のまま進めたものの、
置き換えた方が考えやすいので、
置き換えて進めます!

$$\text{また、} \begin{cases} |2\vec{OA} + \vec{OB}| = 1 \\ |\vec{OA} + 2\vec{OB}| = 1 \\ (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2\vec{OA} + \vec{OB}| = 1 \\ |\vec{OA} + 2\vec{OB}| = 1 \\ (2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OB}) = 0 \end{cases} \quad \text{に留意!}$$

つまり内積 $\frac{1}{3}$ の式はもう考えなくてOK!
ということで、問題をシンプルに言い換える。

$$\begin{cases} 2\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OX} \\ \vec{OA} + 2\vec{OB} = \vec{OY} \end{cases} \quad \text{とおく.}$$

→ $\vec{OA} + \vec{OB}$ をどう表すか? これだけまだ謎

$\vec{OA}, \vec{OB}$ について解ける!!

これを $\vec{OA}, \vec{OB}$ について整理すると、

$$\vec{OA} = \frac{1}{3}(2\vec{OX} - \vec{OY}) \quad \text{より、}$$

$$\vec{OB} = \frac{1}{3}(2\vec{OY} - \vec{OX})$$

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \frac{1}{3}(\vec{OX} + \vec{OY}) \quad \text{となるので、}$$

題意を言い換えると、

大きさが1で互いに垂直なベクトル $\vec{OX}, \vec{OY}$ に対して、

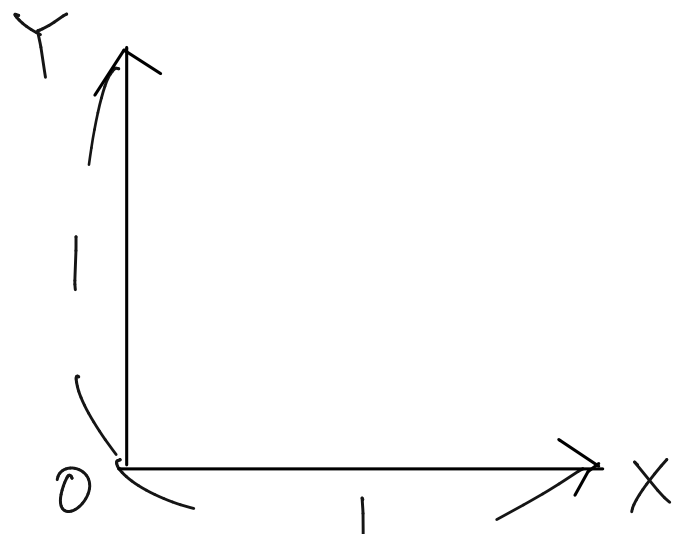
$$|\vec{OP} - \frac{1}{3}(\vec{OX} + \vec{OY})| \leq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \vec{OP} \cdot \vec{OX} \leq \frac{1}{3}$$

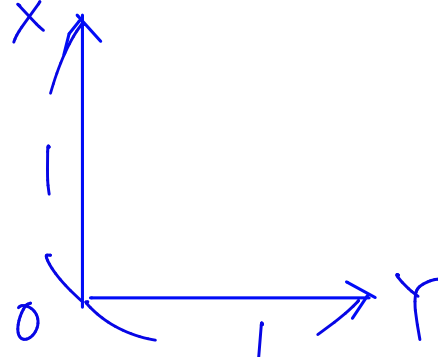
を満たすようにPが動くとき、... (*)

$|\vec{OP}|$ の最大値, 最小値を求めることとなる。

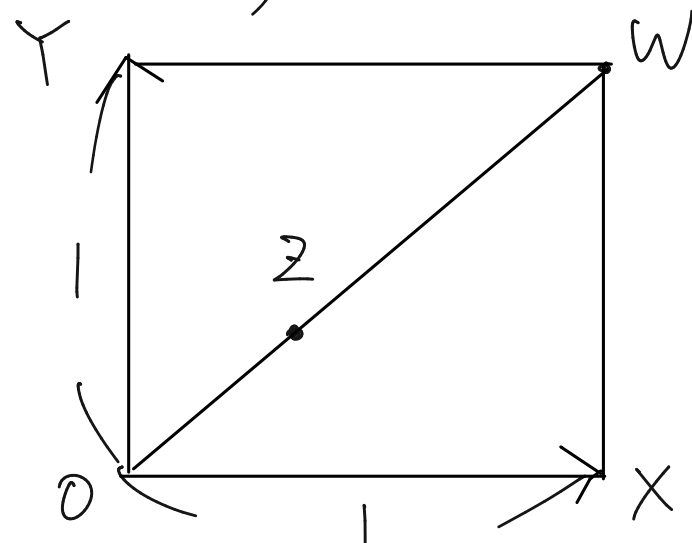
→ $\vec{OX} = (1, 0), \vec{OY} = (0, 1)$ と固定しても一般性を失わないので、座標で考えていくこともできるが、ここでは素直にベクトルと図形で。

O, X, Y を下のような位置関係として考えても一般性を失わない。



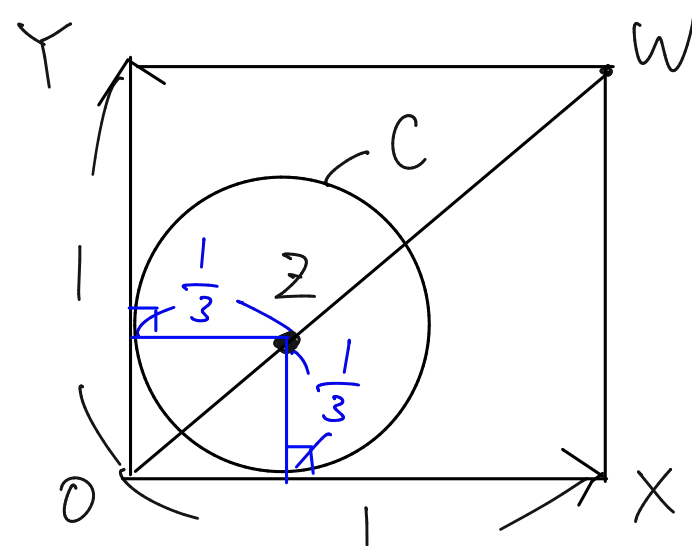
つまり、

 もあるけど、左右
 引っくり返せば同じ
 なので 結論同じ!

ここで、 $\frac{1}{3}(\vec{OX} + \vec{OY}) = \vec{OZ}$
 とおくと、Zは下図の
 正方形 $OXWY$ の対角線 OW を3等分する点
 (Oに近い方) である。



$$|\vec{OP} - \frac{1}{3}(\vec{OX} + \vec{OY})| \leq \frac{1}{3} \quad \text{つまり}$$

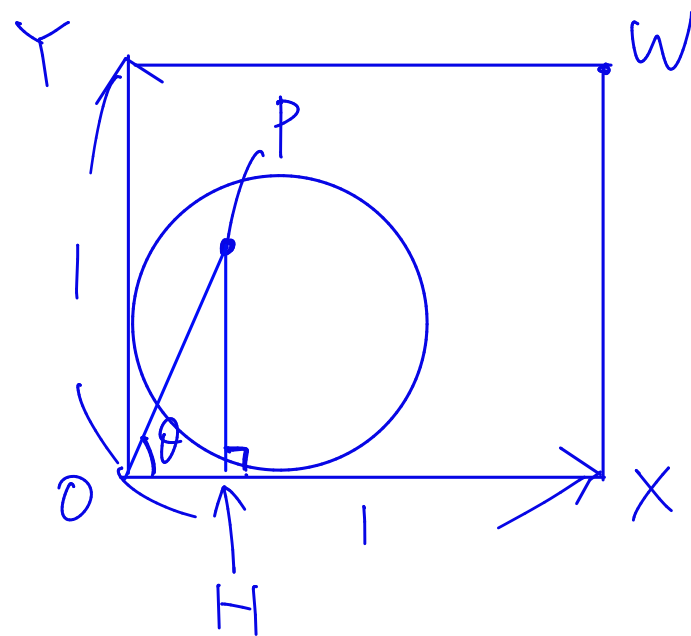
$|\vec{ZP}| \leq \frac{1}{3}$ を満たす P は、Z を中心と
 して半径 $\frac{1}{3}$ の円 C の周上および内部に
 存在し、円 C は OX, OY に接することにな
 なる。



さらに この中で、P から OX に下した
 垂線の足を H とすると、

$$\vec{OP} \cdot \vec{OX} \leq \frac{1}{3} \iff \underline{OH \leq \frac{1}{3}} \quad \text{であるので、}$$

☹ 内積の図形的意味 (okke 用語で!)

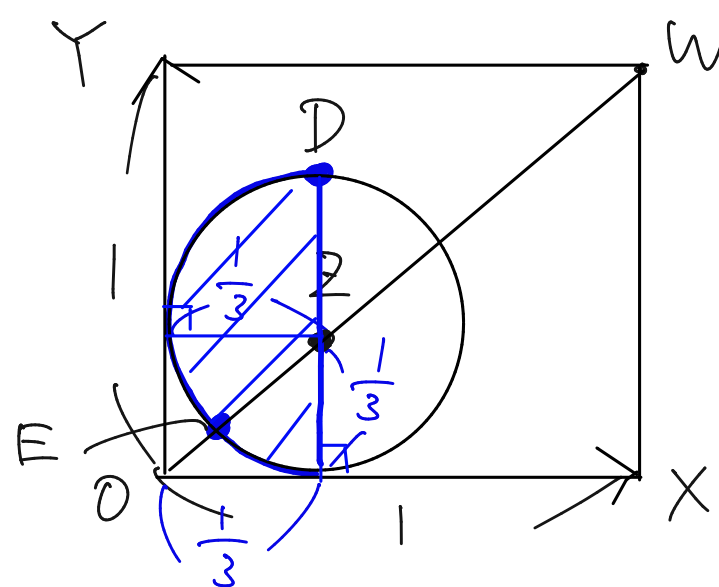


$$\begin{aligned}\vec{OP} \cdot \vec{OX} &= OP \cdot OX \cdot \cos \theta \\ &= OP \cos \theta \\ &= \underline{\underline{OH}}\end{aligned}$$

ただし、 $\cos \theta \geq 0$ に注意!!!

← あくまでも円内に P があとので
今回は OK.

(*) を満たす点 P は、円 C の左半円 (周上含む) を動くことになる。



よって、 $|\vec{OP}|$ が最大になるのは、P が図の D と一致するときで、最大値は

$$\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{3}}}$$

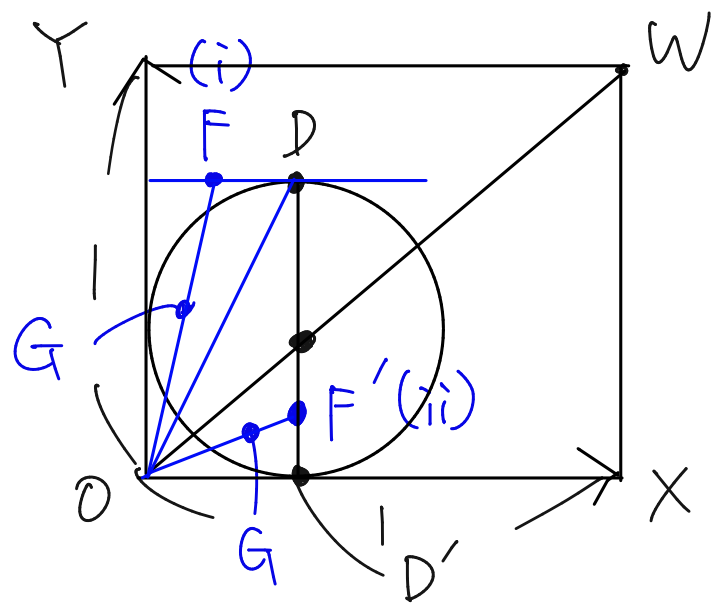
である。

$|\vec{OP}|$ が最小になるのは P が図の E と一致するときで、最小値は

$$\frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)}}$$

である。

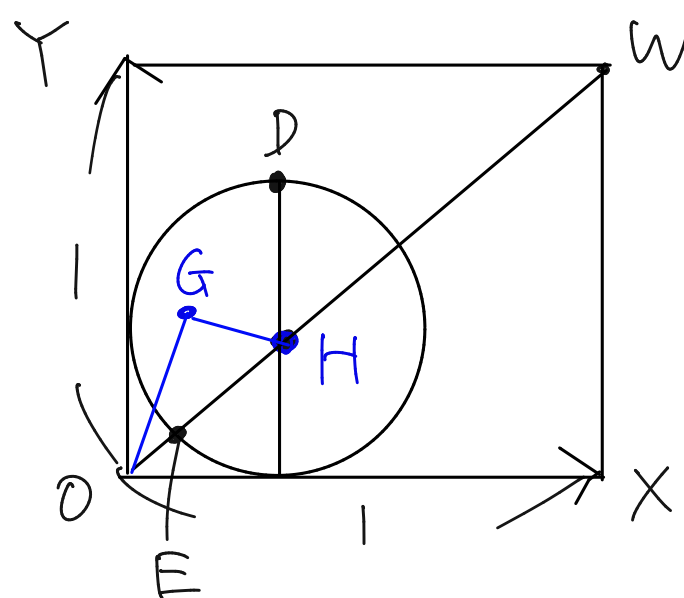
※ なぜ "D と E のとき" が系内得. 証明
 できますか? たとえば...



領域内の点を
 G とすると,
 G が OD 上に
 あるときは自明

(i) $OG \leq OF$ (G が D のときのみに一致)
 $OF \leq OD$ (F が D のときのみに一致)
 $\rightarrow D$ 以外では $OG < OD$

(ii) $OG \leq OF'$ (G が線分 OD 上で一致)
 $OF' \leq OD$ (F' が D のときのみに一致)
 $\rightarrow D$ 以外では $OG < OD$



$GH \leq EH$ (G が半円周上のときのみに一致)
 $\dots \textcircled{\star}$

$OG + GH \geq OH$ (G が線分 EH 上の
 ときのみに一致)
 $\Leftrightarrow OG + GH \geq OE + EH$
 $\Leftrightarrow OG \geq OE + (EH - GH)$ $\textcircled{\star}$
 よって、 $OG \geq OE + (EH - GH) \geq OE$

$\rightarrow E$ 以外では $OG > OE$
 (半円周上かつ線分 EH 上は点 E のみ)