

東北大学 2021 理系第3問 / 文系第2問

- 正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ について、以下の問いに答えよ。
- (1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち、直角三角形であるものの個数を求めよ。
 - (2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち、直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。
 - (3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち、次の条件 (*) を満たすものの個数を求めよ。
(*) 四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。

動画や公式を検索しやすいアプリ **okke** 

★ 数え上げの大鉄則

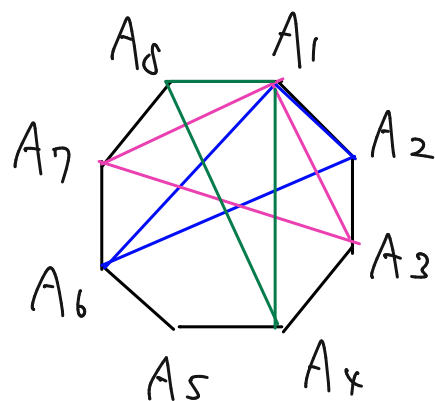
→ モレなくダブリなく.

そのために場合分けを工夫する!

- (1) 直角がどこにあるかによって場合分けすれば、モレなくダブリなく数えられる。
(2つの角が直角になることはないのぞ)

例えば、角 A_1 が直角となるような直角三角形の個数は、

$$\begin{cases} \triangle A_1 A_2 A_6 \\ \triangle A_1 A_3 A_7 \\ \triangle A_1 A_4 A_8 \end{cases}$$



で3個. よって直角三角形は合計で
 $3 \times 8 = \underline{24 \text{ 個}}$ である。

- (2) ~でもなく ~でもない.

→ 具体的な三角形の形状がないので、ベン図で余事象で考えるのが良さそう。(考え方①)

→ でも意外と二等辺と直角が多いので、そうじゃない三角形を地道に考えても良さそう。(考え方②)

考え方①

直角三角形は(1)で考え済み!

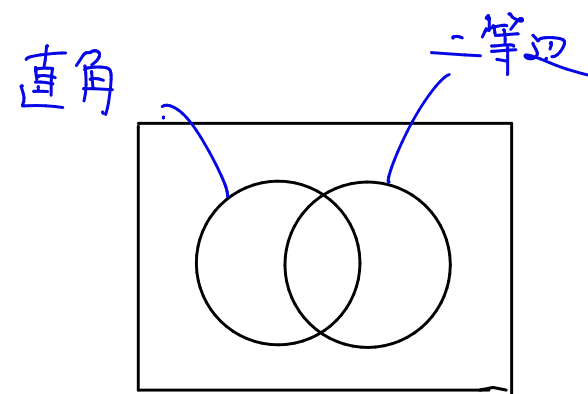
二等辺三角形も(1)と

同様に、頂角の位置で分ければ、

モレなくダブリなく数えられる。

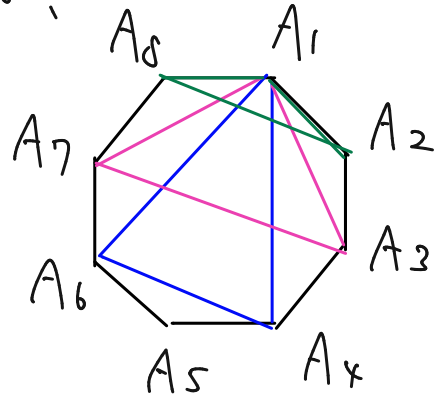
(正三角形になることはないのぞ)

→ なぜ注意が必要?



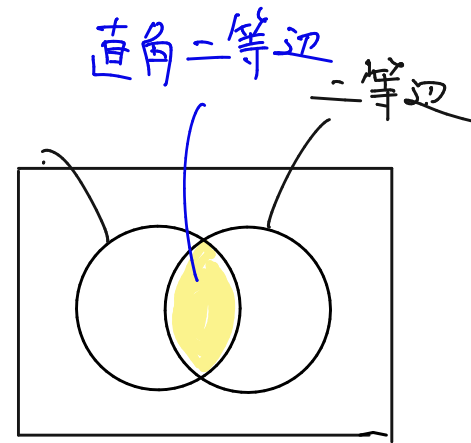
例えば"角 A_1 が頂角となるような二等辺三角形の個数は、

$\left\{ \begin{array}{l} \triangle A_1 A_2 A_8 \\ \triangle A_1 A_3 A_7 \\ \triangle A_1 A_4 A_6 \end{array} \right.$



で3個. よって二等辺三角形は合計で
 $3 \times 8 = 24$ 個である。

最後にダブリ部分. 直角
 直角二等辺三角形の
 個数を調べる. 例えば
 角 A_1 が直角となる

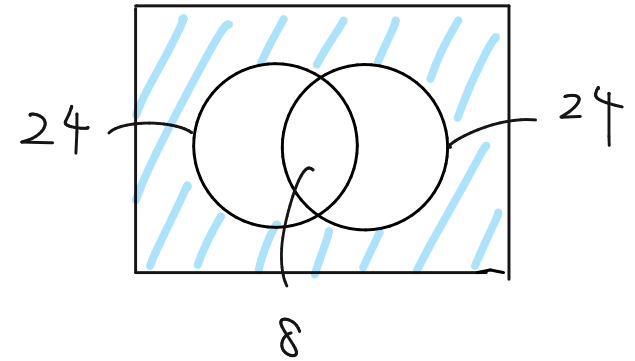


直角二等辺三角形の個数は
 $\triangle A_1 A_3 A_7$ で1個. よって合計で
 $1 \times 8 = 8$ 個である。

以上より, 求める個数は

$$\underline{8C_3} - (24 + 24 - 8) = \underline{16} \text{ 個}$$

全ての三角形の個数



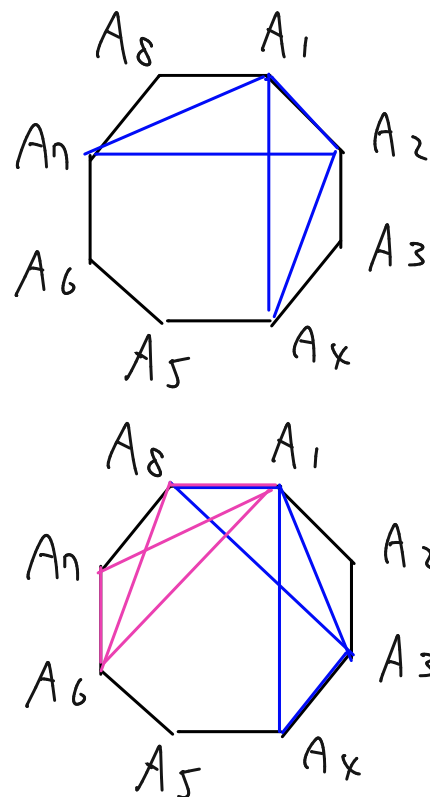
考え方②

直接求めて, 割ることでダブリを消す.
 A_1 を含む, 二等辺でも直角でもない
 三角形の個数を数えて, $\times 8$ して
 $\div 3$ する 全ての点の分
 各頂点でカウントされるので

例えば, A_1 を通る, 二等辺三角形でも
 直角三角形でもない三角形の個数は,

$\triangle A_1 A_2 A_4$
 $\triangle A_1 A_2 A_7$
 $\triangle A_1 A_3 A_4$
 $\triangle A_1 A_3 A_8$
 $\triangle A_1 A_6 A_7$
 $\triangle A_1 A_6 A_8$

なるべく
 11 順序立てて
 数え上げ！



の 6 個。

よって求める個数は

$$6 \times 8 \div 3 = \underline{16 \text{ 個}}$$

(3) まずは設定を理解すること。

各直角三角形 (i) で考えた) に対して、

4 点目の候補は 5 つ ある。

(どの点でも (*) を満たす)

でも ダブり がある。

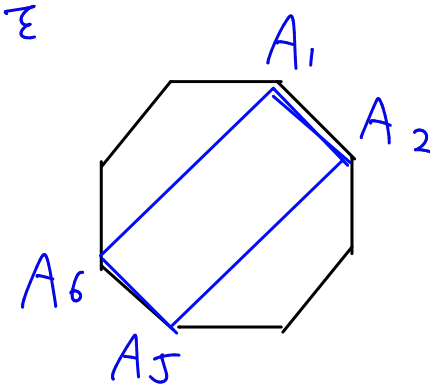
→ どれくらい ダブる か？

→ できた四角形から作れる直角三角形の個数分 ダブる。

例えば、 $\triangle A_1 A_2 A_5 A_6$ を
 考えたときに、

これは 直角三角形

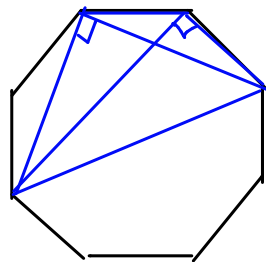
$\triangle A_1 A_2 A_5$
 $\triangle A_1 A_2 A_6$
 $\triangle A_1 A_5 A_6$
 $\triangle A_2 A_5 A_6$



の 4 つ を 作 れ る こ と に
 な る の で、4 回 カウ ン ト
し て し ま う。

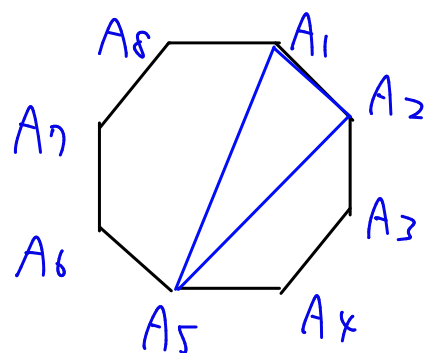
必ず4つか？

→ 2つのケースもある.



では例えば"直角三角形 $A_1 A_2 A_5$ を考えてみる.

四角形を作る4点目の候補は5つ.



$\left\{ \begin{array}{l} A_3 \rightarrow 2 \text{つの直角三角形を作る} \\ A_4 \rightarrow 2 \quad \text{〃} \\ A_6 \rightarrow 4 \quad \text{〃} \\ A_7 \rightarrow 2 \quad \text{〃} \\ A_8 \rightarrow 2 \quad \text{〃} \end{array} \right.$

(1) で考えた各直角三角形について、4点目のとり方は5通りある。
そのうち、

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{① 直角三角形を4つ作れるような四角形} \\ \text{ができるような点の選び方は1通り} \\ \text{② 直角三角形を2つ作れるような四角形} \\ \text{ができるような点の選び方は4通り} \end{array} \right.$

→ これで"ダブリ"を除くことができる.

どんな直ニでも同じ
(実験すると
見えてくる)

よって求める四角形の個数は

$$24 \times \underbrace{1}_{\text{①}} \div \underbrace{4}_{\text{ダブリ}} + 24 \times \underbrace{4}_{\text{②}} \div \underbrace{2}_{\text{ダブリ}} = \underline{54 \text{ 個}}$$