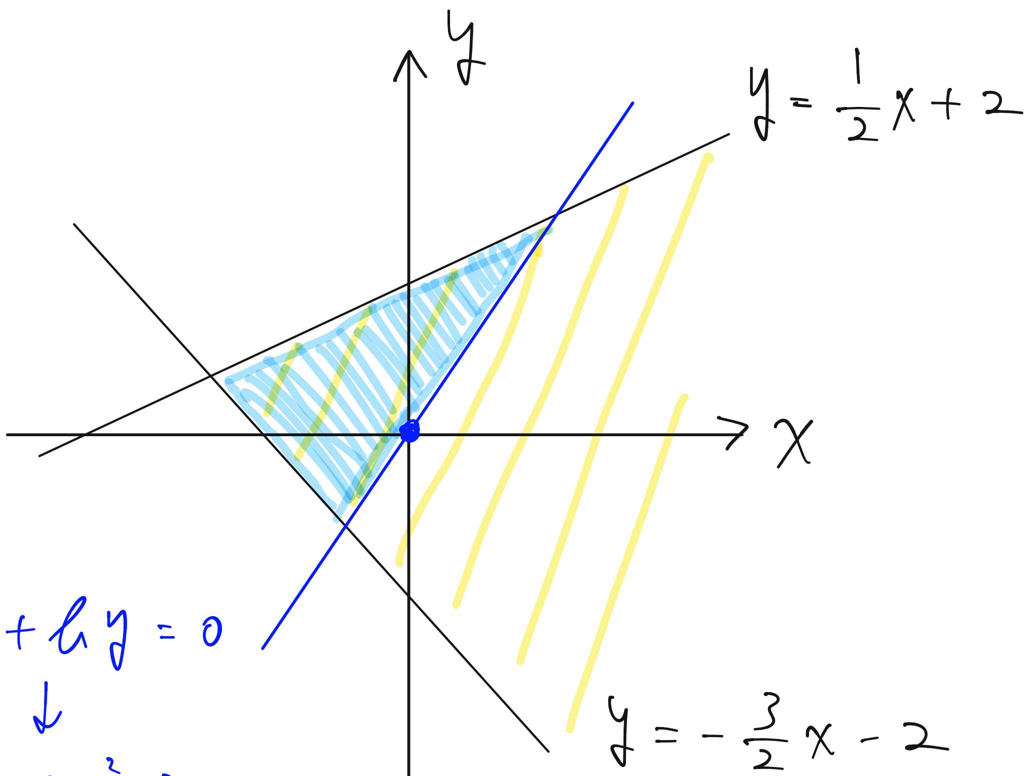
まずは書けるものはグラフを書いてみる。
→特殊性に気付くチャンス！



$ax+by=0$
↓
原点を通る。
傾きは色々と動く。(正領域・負領域：良問53)

(1) 図形的にいくか、座標とか式を立てていくか。

考え方①：図形的に

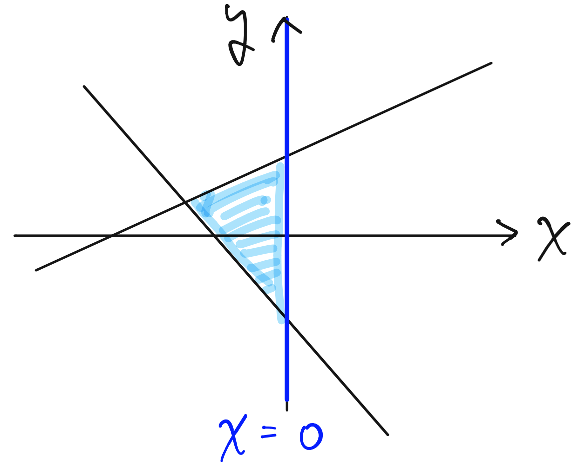
傾きに着目する。「0で割れない」に注意！

$ax+by=0$ から、$y=-\frac{a}{b}x$ としたいので、$b=0$ を場合分け。

直線 $ax+by=0$ を ℓ とする。

(i) $b=0$ のとき。

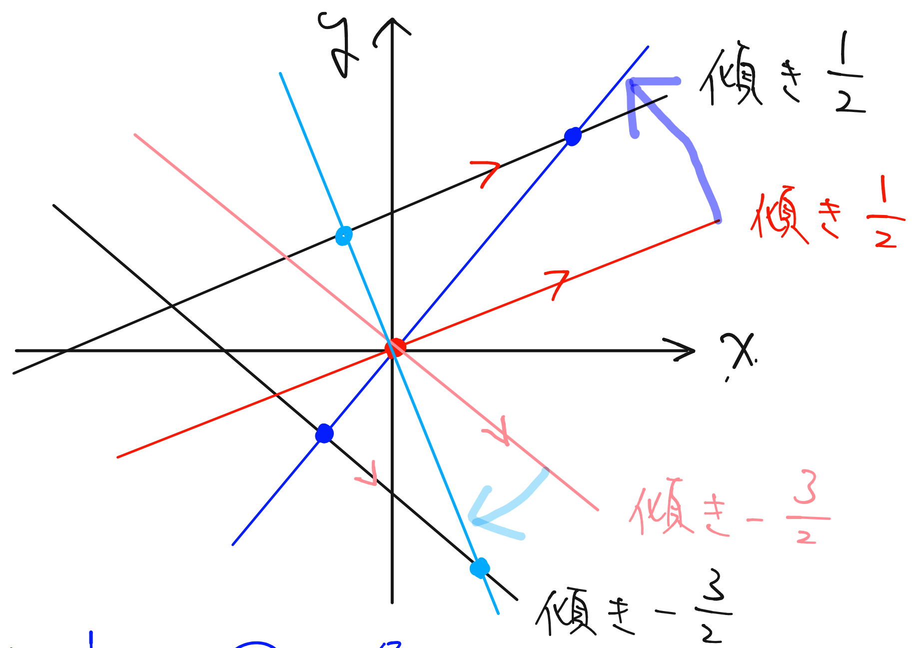
ℓ の式は $ax=0$ となり、題意より $a\neq 0$ なので ℓ は $x=0$ を表し、三角形が作られるので OK.



(ii) $b\neq 0$ のとき。

ℓ の式は $y=-\frac{a}{b}x$ となり、傾きは $-\frac{a}{b}$

よって三角形が作られるための条件は、



傾きが、$\frac{1}{2}$より ⊕に急

or $-\frac{3}{2}$より ⊖に急 であればOK.なので

$-\frac{a}{b} < -\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} < -\frac{a}{b}$ …① → $b \gtrless 0$で場合分け.

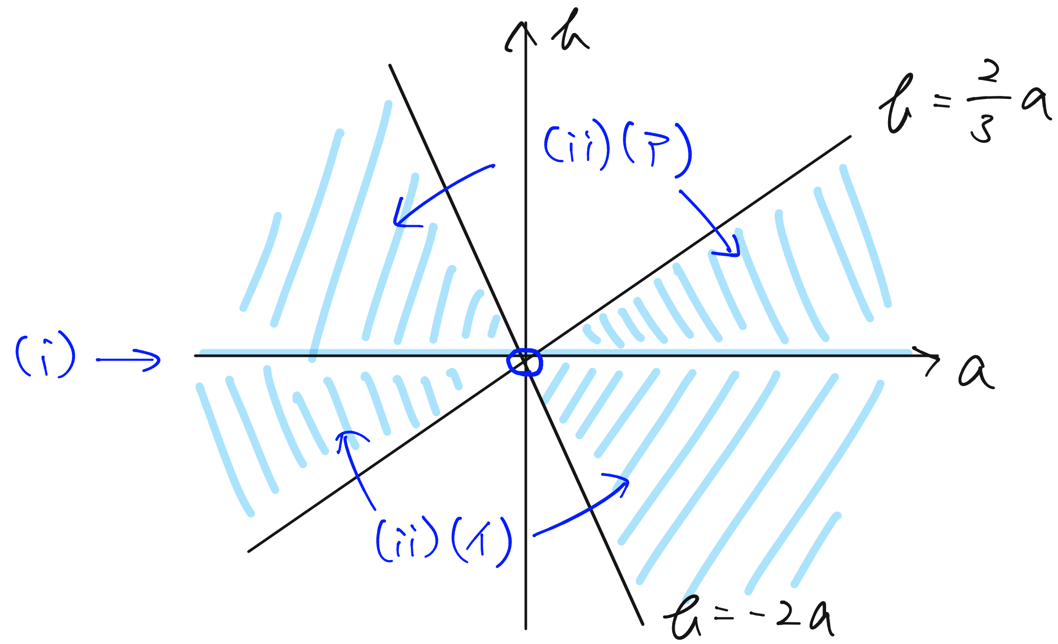
または　　立式

(ア) $b>0$のとき. ① $\Leftrightarrow$ $b < \frac{2}{3}a$, $b < -2a$

(イ) $b<0$のとき ① $\Leftrightarrow$ $b > \frac{2}{3}a$, $b > -2a$

以上(i)(ii)をまとめて図示すると.

→上で式出したが、ここでは図示して式をまとめる.



境界は全て含まない.

条件式は.

$$\begin{cases} a>0のとき & -2a < b < \frac{2}{3}a \\ a<0のとき & \frac{2}{3}a < b < -2a \end{cases}$$ となる。

考え方②：座標で → (2)にも通じる.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ ax + by = 0 \end{cases}$$ の交点は.

$ax + b\left(\frac{1}{2}x + 2\right) = 0$

$(2a + b)x = -4b$

ここで、$2a+b=0$ とすると、$b=0$ となり、

$a=0$ が導かれるが、題意に反するので不適

よって $\underline{2a+b \neq 0}$ で考えて、 → よって交点がない

$$x = \frac{-4b}{2a+b}$$

このとき、$y = \dfrac{4a}{2a+b}$ → 点Aとする。

一方、$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x - 2 \\ ax + by = 0 \end{cases}$ の交点は、

$ax + b\left(-\frac{3}{2}x - 2\right) = 0$

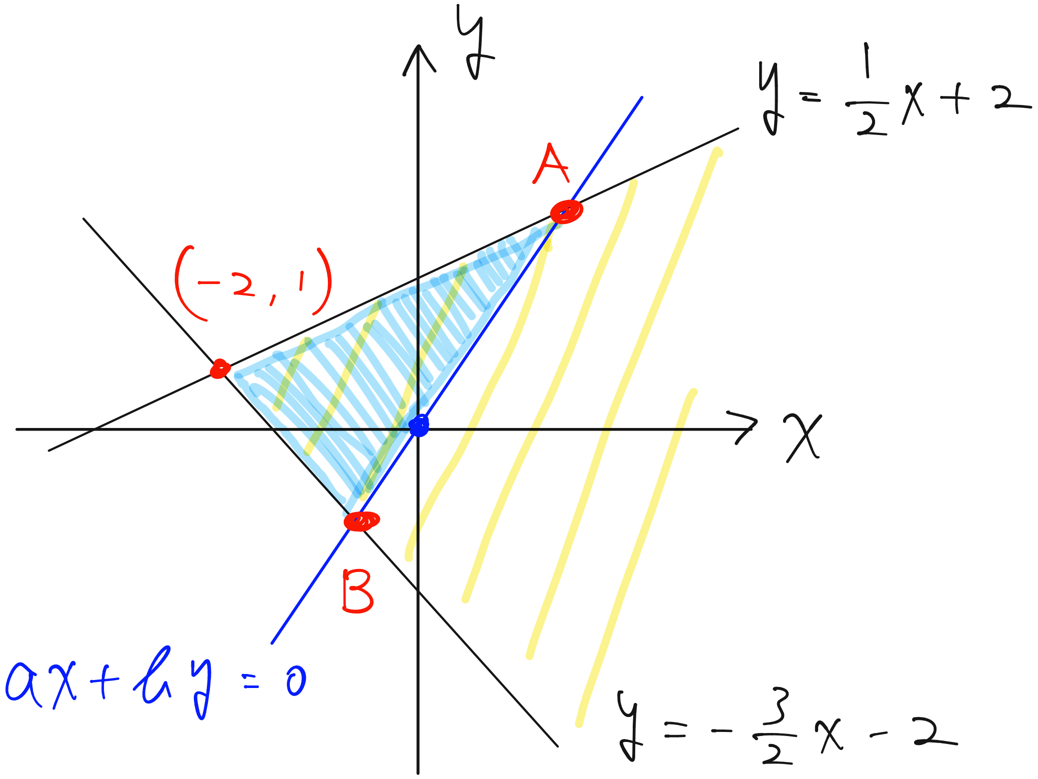
$(2a - 3b)x = 4b$

上と同様な理由で $\underline{2a-3b \neq 0}$ のもとで

$$x = \frac{4b}{2a-3b}$$

このとき、$y = \dfrac{-4a}{2a-3b}$ → 点Bとする。

ここで、題意の三角形が作られる条件は、

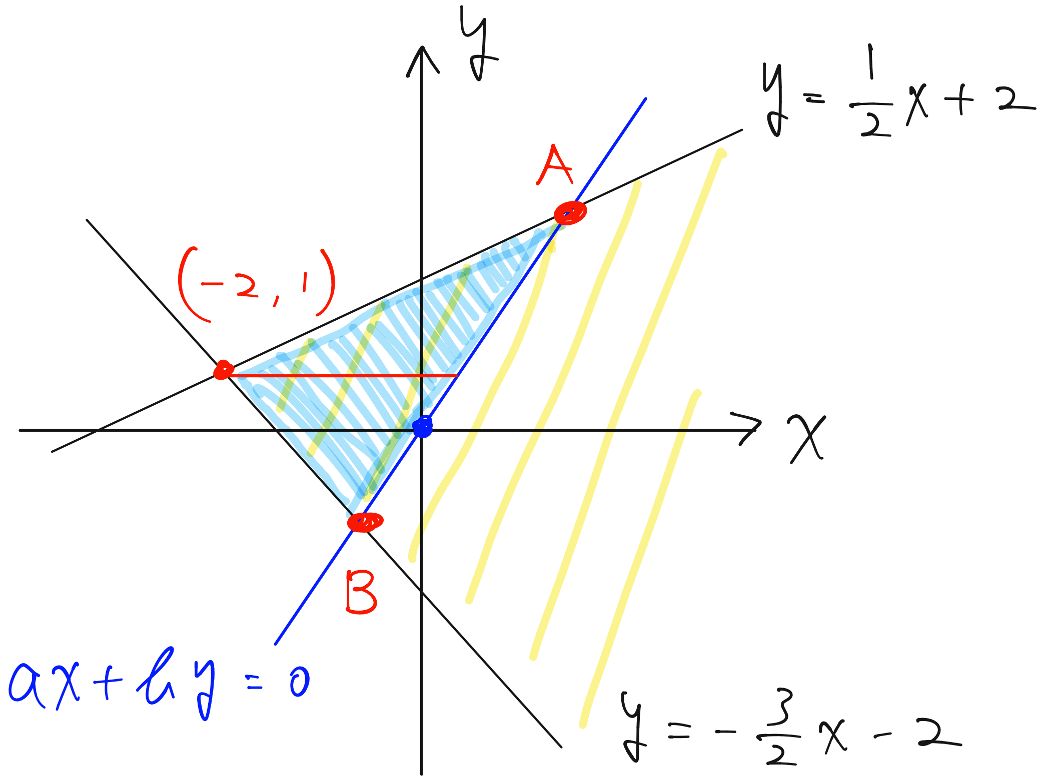


$\dfrac{-4b}{2a+b} > -2$ かつ $\dfrac{-4b}{2a-3b} > -2$ ← 立式

→ AとBのx座標が-2より大きい。

→ 以下この連立不等式を解いていく…(略)

(2)



$y=1$ と $ax+by=0$ の交点の x 座標は.
(赤線)

(1) のもとで $a\neq0$ なので $x=-\frac{b}{a}$

よって求める面積は.

$$S=\frac{1}{2}\times\underbrace{\left(-\frac{b}{a}-(-2)\right)}_{\text{赤線の長さ}}\times\underbrace{\left(\frac{4a}{2a+b}-\frac{-4a}{2a-3b}\right)}_{\text{AとBのy座標の差}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2a-b}{a}\times\frac{4a(2a-3b)+4a(2a+b)}{(2a+b)(2a-3b)}$$

$$=\frac{4(2a-b)^2}{(2a+b)(2a-3b)}$$ となる。

(3) 不等式の証明.

$S-4\geqq0$ を示す.

$$S-4=\frac{4(2a-b)^2}{(2a+b)(2a-3b)}-4$$

$$=\frac{4(2a-b)^2-4(2a+b)(2a-3b)}{(2a+b)(2a-3b)}$$

$$=\frac{16b^2}{(2a+b)(2a-3b)}\quad\cdots②$$

(1) より, $\left(\frac{2}{3}a-b\right)(-2a-b)<0$

$\Leftrightarrow(2a-3b)(2a+b)>0$ なので,

② $\geqq0$ が示された。