

北海道大学 2023 文系第2問

三角形 OAB は辺の長さが $OA = 3$ 、 $OB = 5$ 、 $AB = 7$ であるとする。また、 $\angle AOB$ の二等分線と直線 AB との交点を P とし、頂点 B における外角の二等分線と直線 OP との交点を Q とする。

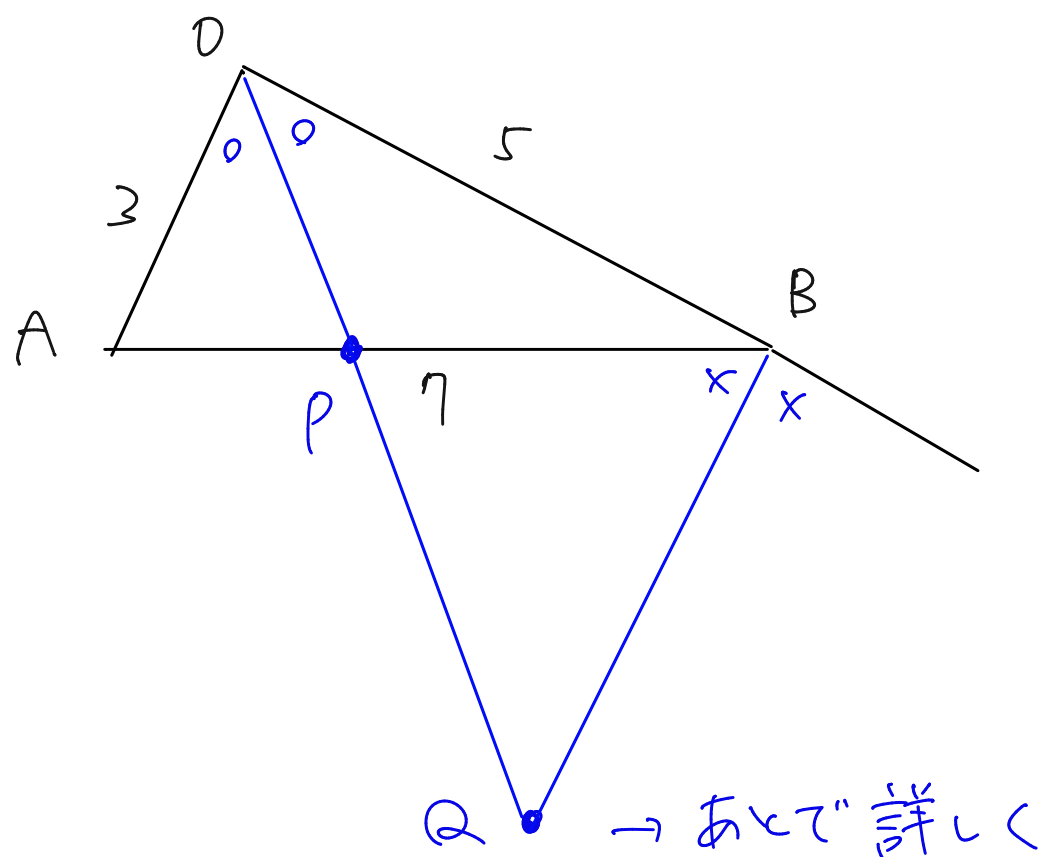
- (1) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。また、 $|\overrightarrow{OP}|$ の値を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。また、 $|\overrightarrow{OQ}|$ の値を求めよ。

★まずは図を書けるときは書く

★位置ベクトルの求め方

→ その点がどうやって定まっているかを
まず考える (どの直線上にあるかとか)

→ それを1コ1コ立式するだけ。
(幾何的に考えた方がラクなことも)



(i) Pはどのような点か?

→ OP ($\angle AOB$ の二等分線) と
ABの交点.

→ この2つの情報を使う.

OPは $\angle AOB$ の二等分線なので、

$$AP:PB = OA:OB \quad \leftarrow \text{幾何的に考える}$$
$$= 3:5$$

よって、

$$\underline{\underline{\vec{OP} = \frac{5}{8}\vec{OA} + \frac{3}{8}\vec{OB}}} \quad \leftarrow \text{分点公式}$$

と表される。

$|\vec{OP}|$ について、幾何的にいける?

×とどくそう. ($\angle AOB = 120^\circ$ には気が付かない)

→ ベクトルでゴリ押し.

→ 内積が必要. $\cos$ は余弦定理で

よって、
 $|\vec{OP}|^2 = \left| \frac{5}{8} \vec{OA} + \frac{3}{8} \vec{OB} \right|^2$

↑
 2乗して求める

$$= \frac{25}{64} \underbrace{|\vec{OA}|^2}_9 + \frac{15}{32} \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \frac{9}{64} \underbrace{|\vec{OB}|^2}_{25}$$

$$= \frac{225}{32} + \frac{15}{32} \times 3 \times 5 \times \cos \angle AOB \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $\triangle OAB$ で「余弦定理より」

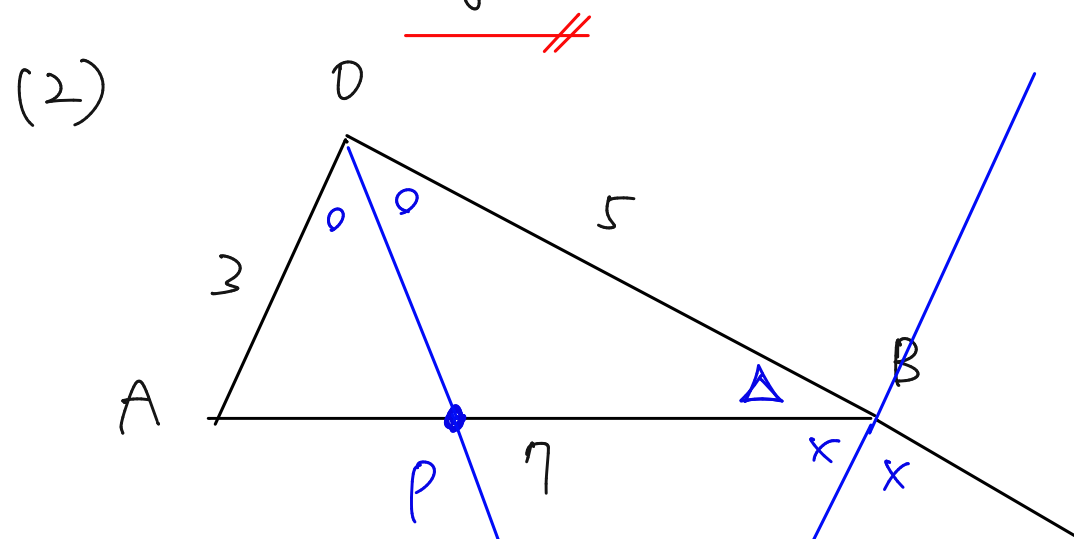
$$\cos \angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB}$$

$$= \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$= -\frac{1}{2} \quad \text{を得るので、}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \frac{225}{32} - \frac{225}{64} \\ &= \frac{225}{64} \quad \text{となる。} \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{OP}| = \frac{15}{8} \quad \text{を得る。}$$



いわゆる
傍心

議論に影響ないけど

必ず「こっち」にある
理由は何？

$$\begin{cases} \angle O + \angle \Delta < 180^\circ \\ \angle \Delta + \angle X < 180^\circ \end{cases}$$

$$\rightarrow \angle O + \angle \Delta + \angle X < 360^\circ$$

$$\therefore \angle O + \angle \Delta + \angle X < 180^\circ \rightarrow \text{これで確定!}$$

Qはどういう点か?

$\rightarrow$ OPと $\angle B$ の外角の二等分線の交点

$\rightarrow$ それぞれ立式する.

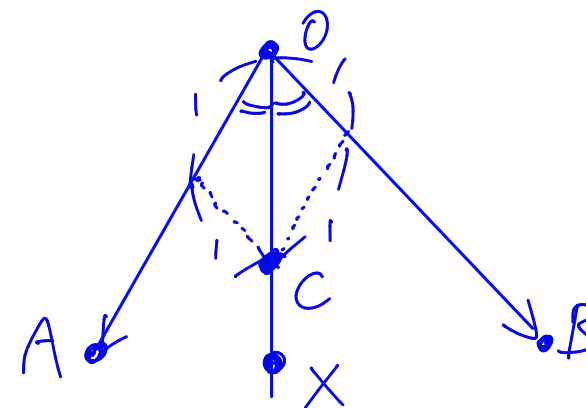
Qは直線OP上にあるので、ある実数 k を用いて、

$$\vec{OQ} = k \vec{OP}$$

$$= \frac{5}{8} k \vec{OA} + \frac{3}{8} k \vec{OB} \quad \text{--- (2) と表される。}$$

さらに、Qは $\angle B$ の外角の二等分線であるので、

※ 角の二等分線ベクトルの求め方
(いもこれ使ってもよかった)



二等分線上の
点Xは全て、

$$\vec{OX} = k \left(\frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} + \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|} \right) \quad \text{で表せる.}$$

($k \in \mathbb{R}$)

(辺が1の
平行四辺形の対角線の
ベクトル! $\vec{OC}$)

Hand-drawn diagram illustrating a geometric problem. A triangle ABC is shown with vertices A , B , and C . A point P is located on the side AB . A line segment PQ is drawn from P to a point Q located below the triangle. A vector $\vec{BA}$ is shown in green, and a vector $\vec{OB}$ is shown in blue. The diagram is annotated with handwritten notes in Japanese:

- Top right: $\angle F$ 子 か.
- Right side: いちどうする? $\vec{OB}$ を ずらす
- Bottom right: $\vec{OB}$

$$\begin{aligned}\vec{BQ} &= \ell \left(\frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} + \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|} \right) \\ &= \frac{\ell}{7} \vec{BA} + \frac{\ell}{5} \vec{OB}\end{aligned}$$

$$= \frac{l}{7} (\vec{OA} - \vec{OB}) + \frac{l}{5} \vec{OB}$$

$$= \frac{l}{7} \vec{OA} + \frac{2}{35} l \vec{OB} \quad \text{と表すことができる。}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BO} \\ &= \frac{l}{7} \overrightarrow{OA} + \left(\frac{2}{35}l + 1 \right) \overrightarrow{OB} \quad \text{--- (3)} \end{aligned}$$

2 3 f')

$$\begin{cases} \frac{5}{8}k = \frac{l}{7} \\ \frac{3}{8}k = \frac{2}{35}l + 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \times \frac{2}{5} \text{ 使 } l \text{ 消可} \\ \text{二得} \end{array}$$

$$\Rightarrow k \in \mathbb{Z}^+ < 2, \quad \frac{3}{8}k = \frac{1}{4}k + 1$$

$$k = 8, \quad l = 35$$

と仮定して、

$$\underline{\underline{\vec{OQ} = 5\vec{OA} + 3\vec{OB}}} \quad \text{と求められた。}$$

大きいのは $\vec{OQ} = 8\vec{OP}$ を活用!!

また、 $\vec{OQ} = 8\vec{OP}$ より、

$$\begin{aligned} |\vec{OQ}| &= 8|\vec{OP}| \\ &= 8 \times \frac{15}{8} \\ &= \underline{\underline{15}} \quad \text{と決った。} \end{aligned}$$