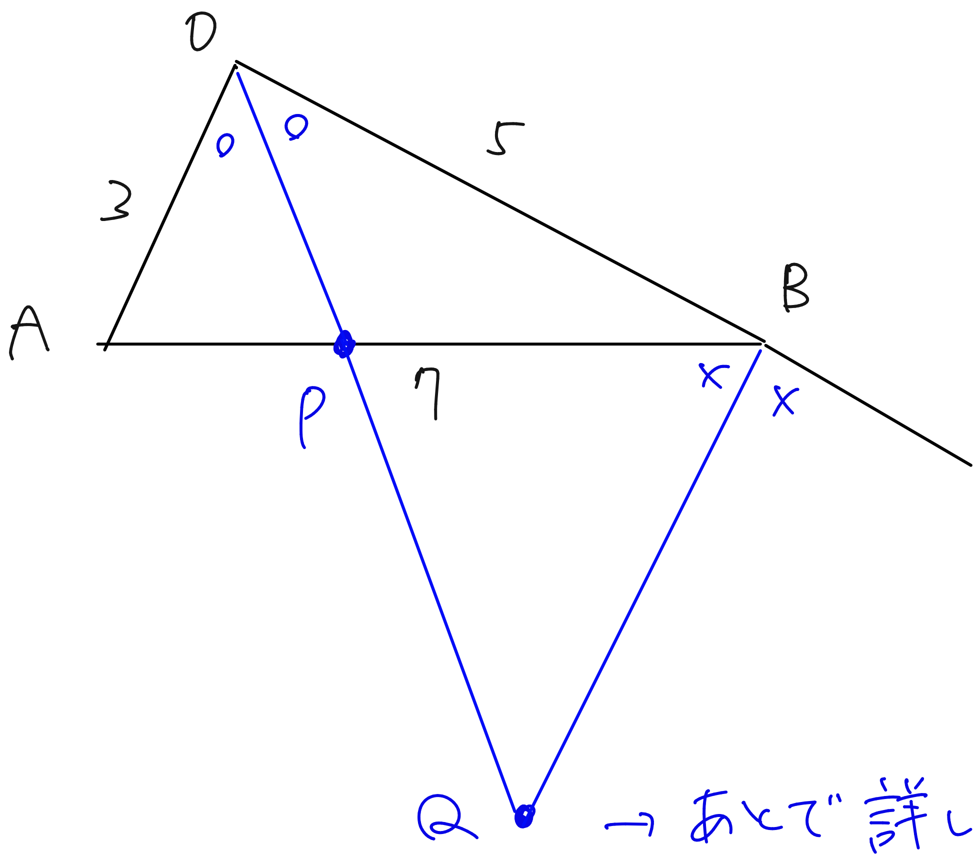
北海道大学 2023 文系第2問

三角形 OAB は辺の長さが $OA=3$、$OB=5$、$AB=7$ であるとする。また、$\angle AOB$ の二等分線と直線 AB との交点を P とし、頂点 B における外角の二等分線と直線 OP との交点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。また、$|\overrightarrow{OP}|$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。また、$|\overrightarrow{OQ}|$ の値を求めよ。

☆まずは図を書けるときは書く
☆位置ベクトルの求め方
→その点がどうやって定まっているかをまず考える(どの直線上にあるかとか)
→それを1コ1コ立式するだけ.
(幾何的に考えた方がラクなことも)



→あとで詳しく

(1) Pはどういう点か?
→ OP(∠AOBの2等分線)とABの交点.
→この2つの情報を使う.

OPは∠AOBの2等分線なので,

$AP:PB = OA:OB$
$= 3:5$

←幾何的に考える

よって,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{5}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$$

←分点公式

と表される。

$|\overrightarrow{OP}|$について,幾何的にいける?
メンドくさそう.(∠AOB=120°には気付けない)
→ベクトルでゴリ押し.
→内積が必要. cosは余弦定理で

よって、

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = \left|\frac{5}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}\right|^2$$

2乗して求める

$$= \frac{25}{64}\underbrace{|\overrightarrow{OA}|^2}_{9} + \frac{15}{32}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{9}{64}\underbrace{|\overrightarrow{OB}|^2}_{25}$$

$$= \frac{225}{32} + \frac{15}{32}\times 3\times 5\times \cos\angle AOB \quad \cdots ①$$

となる。ここで、△OABで余弦定理より

$$\cos\angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2\cdot OA\cdot OB}$$

$$= \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2\cdot 3\cdot 5}$$

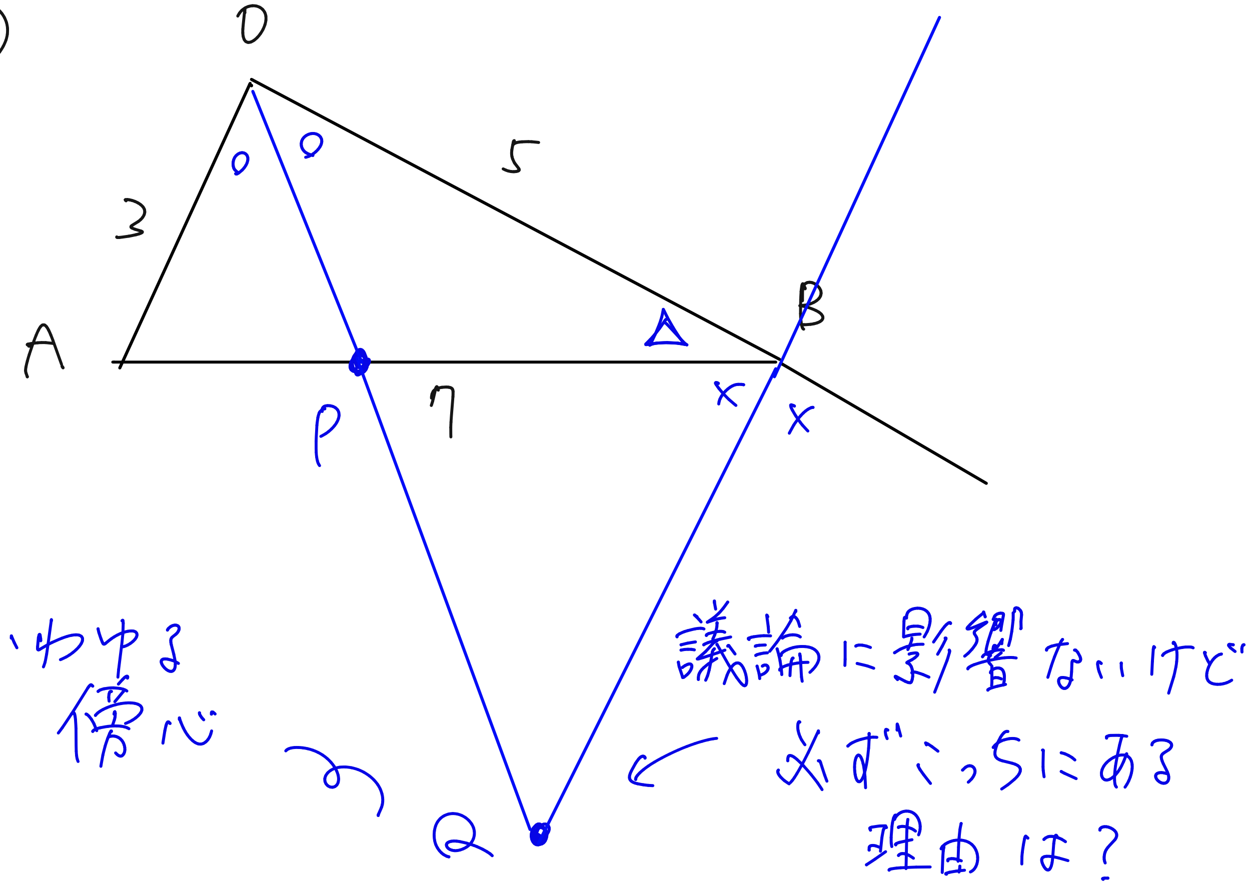
$$= -\frac{1}{2}$$ を得るので、

$$① = \frac{225}{32} - \frac{225}{64}$$

$$= \frac{225}{64}$$ となる。

$$\therefore |\overrightarrow{OP}| = \frac{15}{8}$$ を得る。

(2)



$$\begin{cases} ○○ + △ < 180^\circ \\ △ + ×× = 180^\circ \end{cases}$$

→ $○○ + △△ + ×× < 360^\circ$

$\therefore$ $○ + △ + × < 180^\circ$ → これで確定！

Qはどういう点か？

→ OPと∠Bの外角の2等分線の交点

→ それぞれ立式する。

Qは直線OP上にあるので、ある実数kを用いて、

$$\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$$

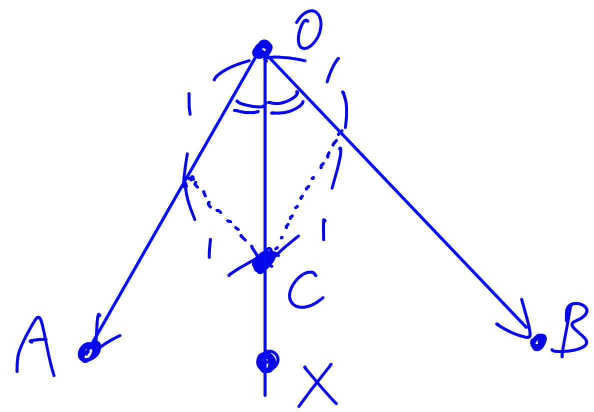
$$= \frac{5}{8}k\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}k\overrightarrow{OB} \quad \cdots ②$$

と表される。

さらに、Qは∠Bの外角の2等分線であるので、

※角の2等分線ベクトルの求め方

((1)もこれ使ってもよかった)



2等分線上の点Xは全て、

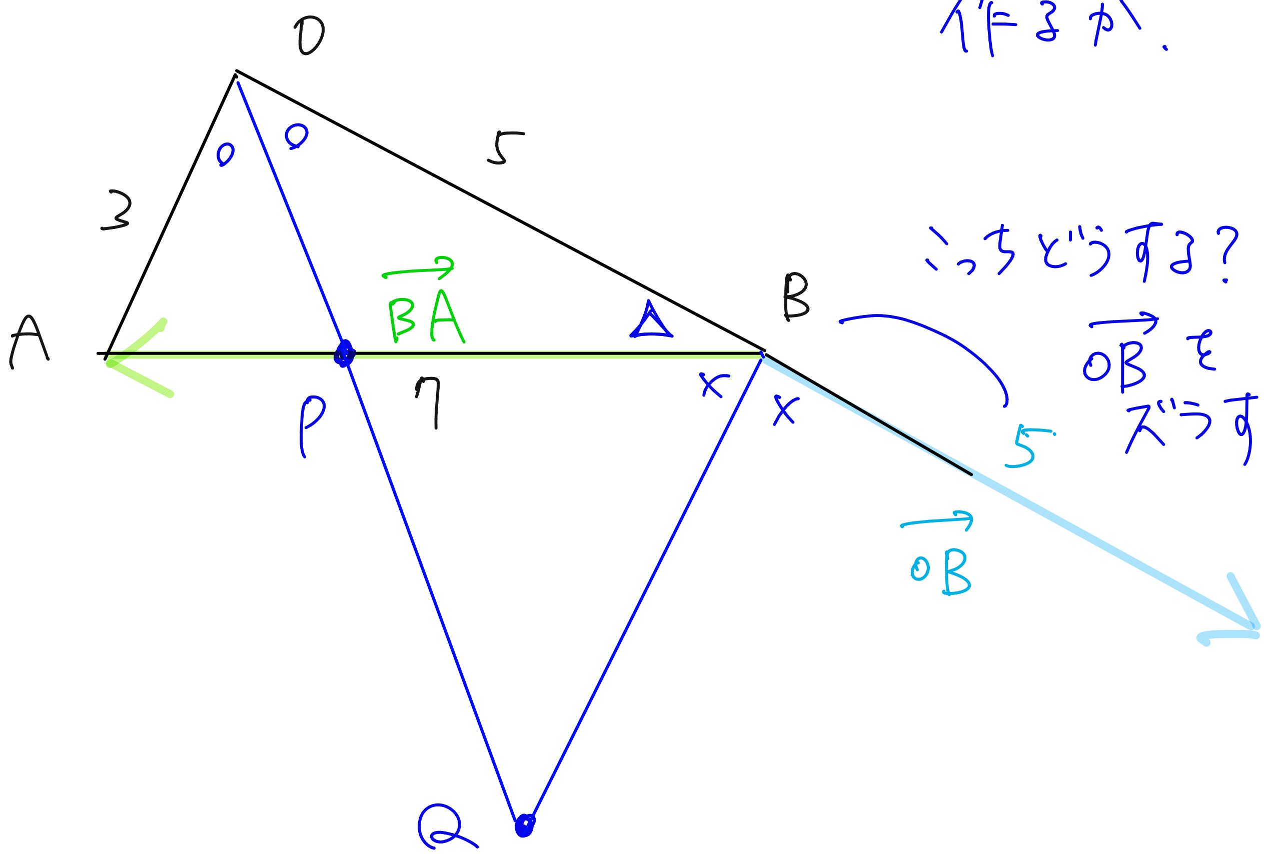
$$\overrightarrow{OX} = k\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} + \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\right)$$

で表せる。

$(k \in \mathbb{R})$

(辺が1のひし形の対角線のベクトル！ $\overrightarrow{OC}$

今回は…？ 何と何のベクトルでひし形を作るか．



ある実数 ℓ を用いて

$$\overrightarrow{BQ} = \ell\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} + \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\right)$$

$$= \frac{\ell}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{\ell}{5}\overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{\ell}{7}\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) + \frac{\ell}{5}\overrightarrow{OB}$$

$$= \underline{\frac{\ell}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{35}\ell\,\overrightarrow{OB}}$$ と表される。

これはあくまでも $\overrightarrow{BQ}$

よって $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BO}$

$$= \underline{\frac{\ell}{7}\overrightarrow{OA} + \left(\frac{2}{35}\ell + 1\right)\overrightarrow{OB}}$$ となる。…③

ここで $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ は<u>一次独立</u>なので，

②③より

$$\begin{cases} \dfrac{5}{8}k = \dfrac{\ell}{7} \\[2mm] \dfrac{3}{8}k = \dfrac{2}{35}\ell + 1 \end{cases}$$ を得る。

$\times\frac{2}{5}$ して ℓ 消す

これを解くと，$\frac{3}{8}k = \frac{1}{4}k + 1$

$k = 8$, $\ell = 35$

となるので、

$\overrightarrow{OQ} = \underline{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}$ と求められる。

大きさは $\overrightarrow{OQ} = 8\overrightarrow{OP}$ を活用!!

また、$\overrightarrow{OQ} = 8\overrightarrow{OP}$ より、

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{OQ}| &= 8|\overrightarrow{OP}| \\
&= 8 \times \frac{15}{8} \\
&= \underline{15}
\end{aligned}
$$

となる。