

北海道大学 2024 理系第1問

t を実数とし、 xy 平面上の点 $P(\cos 2t, \cos t)$ および $Q(\sin t, \sin 2t)$ を考える。

(1) 点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ。

(2) t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき、点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

ただし、 x 軸、 y 軸との共有点がある場合は、それらの座標を求め図中に記せ。



θ を媒質変数として、 θ が1つ決まると
 P, Q が1点に定まる。

$$(1) \begin{cases} \cos 2\theta = \sin \theta \\ \cos \theta = \sin 2\theta \end{cases} \dots \textcircled{1} \text{ を満たす} \\ \text{実数 } \theta \text{ を求める。}$$

★そこまで大変そうじゃないのでそのまま
まとめて変形していく。

★中身をそろえろ、種類をそろえろ意識

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin^2 \theta = \sin \theta \\ \cos \theta = 2\sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

$\rightarrow \cos \theta$ を消さないように!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2\sin \theta - 1)(\sin \theta + 1) = 0 \\ \cos \theta (2\sin \theta - 1) = 0 \end{cases}$$

★方程式は横に弱い!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta = -1 \text{ 又は } \sin \theta = \frac{1}{2} \\ \cos \theta = 0 \text{ 又は } \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{かつ}$$

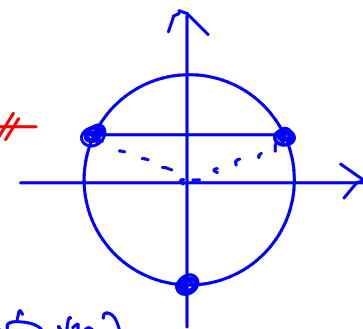
組み合わせは4通りあるように見えるが、
よく考えたらあり得るのは2通りだけ!

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ 又は } \begin{pmatrix} \sin \theta = -1 \text{ かつ} \\ \cos \theta = 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \\ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

と求められる。

★一般角であることに注意。(θは実数)



(2) 図形的にいけないか考えてみる。

うまくいかなさそう...

数式でゴリゴリやっていく。

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \cos t \end{cases} \text{ を満たす } t \text{ が } 0 < t < 2\pi$$

に存在する... (*) ための (x, y) の
必要十分条件を求める。↑

軌跡はこれに尽きる!!

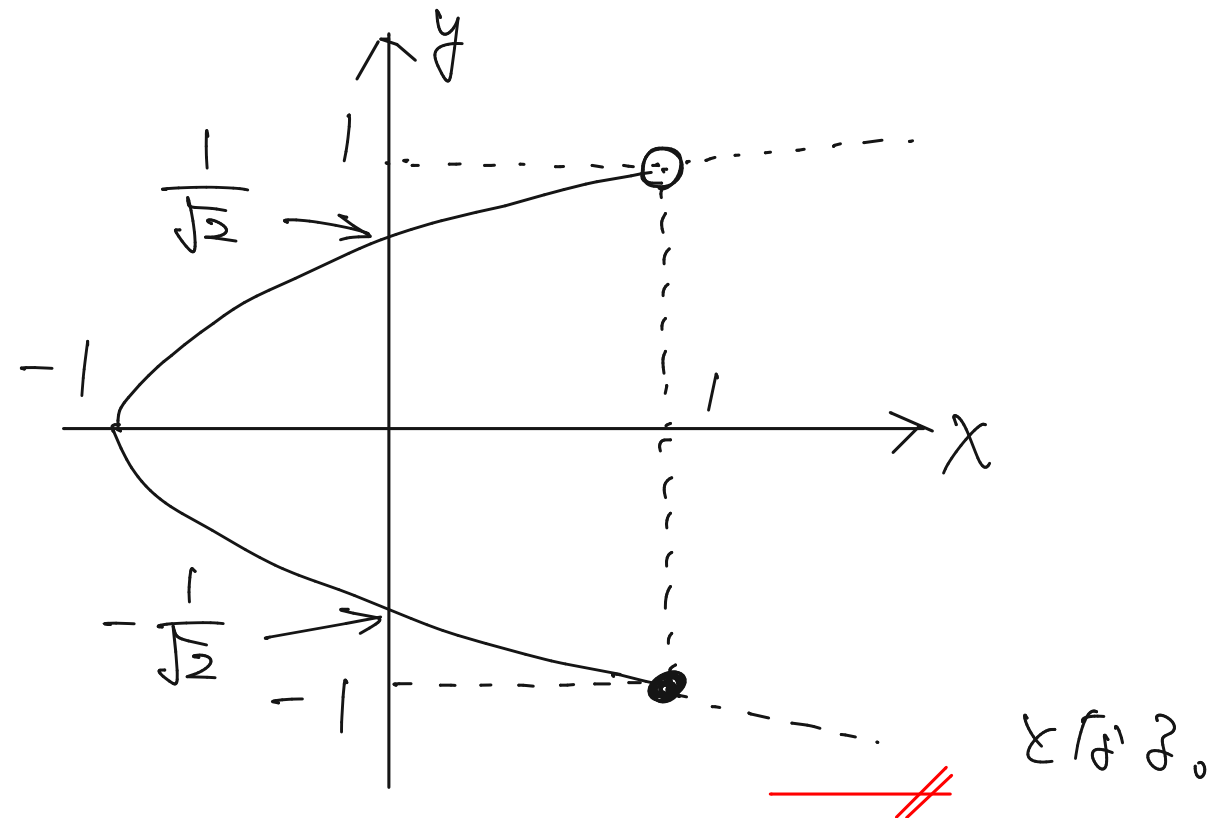
あとは今回は逆像法の発想

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\cos^2 t - 1 \\ y = \cos t \\ 0 < t < 2\pi \end{cases} \text{ を満たす } t \text{ が存在}$$

この確認に
バ血注ぐ!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y^2 - 1 \\ -1 \leq y < 1 \end{cases} \uparrow \text{これが軌跡の式!}$$

よってこれを図示すると、



☆妥当性チェック

- x, y のとりうる値の範囲
- 具体的な t の値を代入して確認