高校数学良問演習 38/100 数列③

以下の漸化式の、一般項 a_n を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

(2) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n + 3}$

以下の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kr^k$ (r の値に注意)　(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$　(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

今日は $a_{n+1} = \triangle a_n + \square$ 以外の漸化式！

(1) 三項間漸化式

a_{n+2}, a_{n+1}, a_n が登場.

ゴールイメージ：

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$
$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

→ こう考えるとうまくいく、というだけのこと。

☺ $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ と $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ の2つが等比数列になって解ける！

変形すると、どちらの式も

$$a_{n+2} = (\alpha+\beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$$ となる.

→ これが元の漸化式と一致してほしい！

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 5 \\ -\alpha\beta = -6 \end{cases} \xrightarrow{\text{変形}} \begin{cases} \alpha+\beta = 5 \\ \alpha\beta = 6 \end{cases}$$

解と係数の関係より、α, β は

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

つまり、$x^2 = 5x - 6$ の2解として計算できる。

(※)

(※) たまたま 元の漸化式の a_{n+2} を x^2, a_{n+1} を x, a_n を 1 に変えた形になった.
→ この方程式を特性方程式といい, 通常 x を用いて立てることが多い。
$(x^2 = 5x - 6)$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ を解くと.

$(x-2)(x-3) = 0$

$x = 2, 3$ となるので.

元の漸化式は.

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) & \cdots ① \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n) & \cdots ② \end{cases}$$

と変形できる。← これが元々の狙い!

①より. 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ として定義すると. $\{b_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = -3$, 公比3の等比数列となるので. 一般項は

$$b_n = a_{n+1} - 2a_n = -3 \cdot 3^{n-1} = -3^n \quad \cdots ③$$

②より. 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{n+1} - 3a_n$ として定義すると. $\{c_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1 = -4$, 公比2の等比数列となるので. 一般項は

$$c_n = a_{n+1} - 3a_n = -4 \cdot 2^{n-1} = -2^{n+1} \quad \cdots ④$$

→ あとは連立して a_{n+1} を消せばOK!!

③ − ④ より $\quad a_n = -3^n + 2^{n+1}$

☆代入チェック!

(2) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n+3}$

→ 分数型．そのまま眺めていても何もわからないが、逆数をとると世界が変わってうまくいく！

→ 逆数をとる前に、分子≠0を必ずチェック！

$a_1=1$ より、帰納的に $a_n \neq 0$ $(n \geqq 1)$

「前の項が0じゃなかったら、次の項が0になることないよね？いま $a_1 \neq 0$ なんだから永久に0になることないよね」というイメージ。

よって両辺の逆数をとると、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4a_n+3}{a_n} = \frac{3}{a_n} + 4$$

数列 $\{b_n\}$ を、$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ と定義すると、

$b_{n+1} = 3b_n + 4$ と表せる。→ 二項間漸！ 37/100

特性方程式 $\alpha = 3\alpha + 4$ を解くと $\alpha = -2$

よって $b_{n+1} + 2 = 3(b_n + 2)$ と変形できる。

$\{b_n+2\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1}+2 = 3$，公比3の等比数列になるので、一般項は

$$b_n + 2 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

$$\therefore \quad b_n = 3^n - 2$$

よって、$a_n = \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{3^n-2}$ //

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k r^k$ とおくと.

$S_n = 1\cdot r + 2\cdot r^2 + 3\cdot r^3 + \cdots + n r^n$

×r ($r S_n = \quad 1\cdot r^2 + 2\cdot r^3 + \cdots + (n-1) r^n + n r^{n+1}$

辺々引くと等比の和が出てくる!

$(1-r) S_n = \underbrace{1\cdot r + 1\cdot r^2 + 1\cdot r^3 + \cdots + 1\cdot r^n}_{\text{計算できる!}} - n\cdot r^{n+1}$

ここで, $r \neq 1$ とすると. ⇒ $r=1$ だと分母に $1-r$ がこれない!

$$(1-r) S_n = \frac{r\cdot(1-r^n)}{1-r} - n\cdot r^{n+1}$$

$$S_n = \frac{r(1-r^n)}{(1-r)^2} - \frac{n\cdot r^{n+1}}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

$r=1$ のときは. $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (r=1)$

☆代入チェック

(4) 部分分数分解 → 分数の引き算にして消しまくる!

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \boxed{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

① まずここをセット

② 通分すると $\frac{2}{k(k+2)}$ となる

③ 元の式になるために, 係数で調整する.

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}\right) \right\}$$

中が消えていく!!

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

☆代入チェック

↓ こうなるように分数を分解する (①のステージ)

(5) (4)の応用！ ①～③は同じ！

まず①について．

$\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ をどう分解したら，足し算で消していくことができるか？

→例えば．$\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ で良さそう。

①について．$\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{2}{k(k+1)(k+2)}$

③について　$\frac{1}{2}$ を掛けて調整．

よって．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{1\cdot2} - \cancel{\dfrac{1}{2\cdot3}} + \cancel{\dfrac{1}{2\cdot3}} - \cancel{\dfrac{1}{3\cdot4}} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \dfrac{(n+1)(n+2)-2}{4(n+1)(n+2)}$

$= \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

☆代入チェック

基礎事項の確認はこれでおわりです。

次回から、これらの武器を手に、

実際の頻出問題にチャレンジしていきますので、お楽しみに！まだ自分のものにしていない方は、必ずこの3問を復習してくださいね！－ばってん