

九州大学 2021 文系第1問

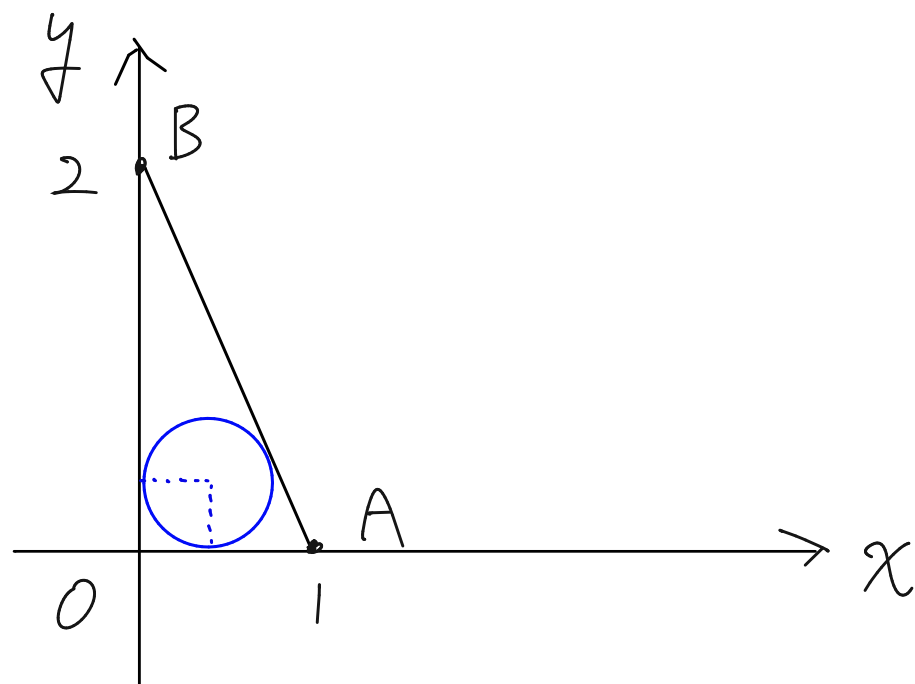
座標平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 2)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 三角形 OAB に内接する円の中心の座標を求めよ。
- (2) 中心が第 1 象限にあり、 x 軸と y 軸の両方に接し、直線 AB と異なる 2 つの交点をもつような円を考える。この 2 つの交点を P, Q とするとき、線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

動画や公式を検索しやすいアプリ okke



グラフや図は書けるときは書く。
→ 特殊性に気付きやすくなる。



(1) 考え方① 図形的に

内接円の半径求めたら
↑ 中心の座標が求められる。

三角形の面積を經由する頻出テーマ

円の半径を r (>0) とすると、
求める中心は (r, r) と表される。

いま、 $\triangle OAB$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = \underline{1} \text{ である。}$$

直角三角形!

ここで、三平方の定理より

$$AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ なので、}$$

r を用いて S を表すと

$$S = \frac{1}{2} (1 + 2 + \sqrt{5}) r = \underline{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} r}$$

$$\text{よって } \frac{3 + \sqrt{5}}{2} r = 1$$

$$r = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

を得るので、中心の座標は

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \text{ となる。}$$

★接線の長さを使ってもすぐ求められる。
 $(1-r) + (2-r) = \sqrt{5}$.

考え方② (2)を見越して

①と同様に半径を r , 中心を (r, r) とおく。
→ あと何が決めれば"いいか?"
→ AB と円が接すること!

(設定は省略) (内側から)

直線 AB の式は $y = -2x + 2$ より、

円と AB が接する条件は、

$$r = \frac{|2r + r - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} |3r - 2|$$

両辺正より 2 乗しても同値。

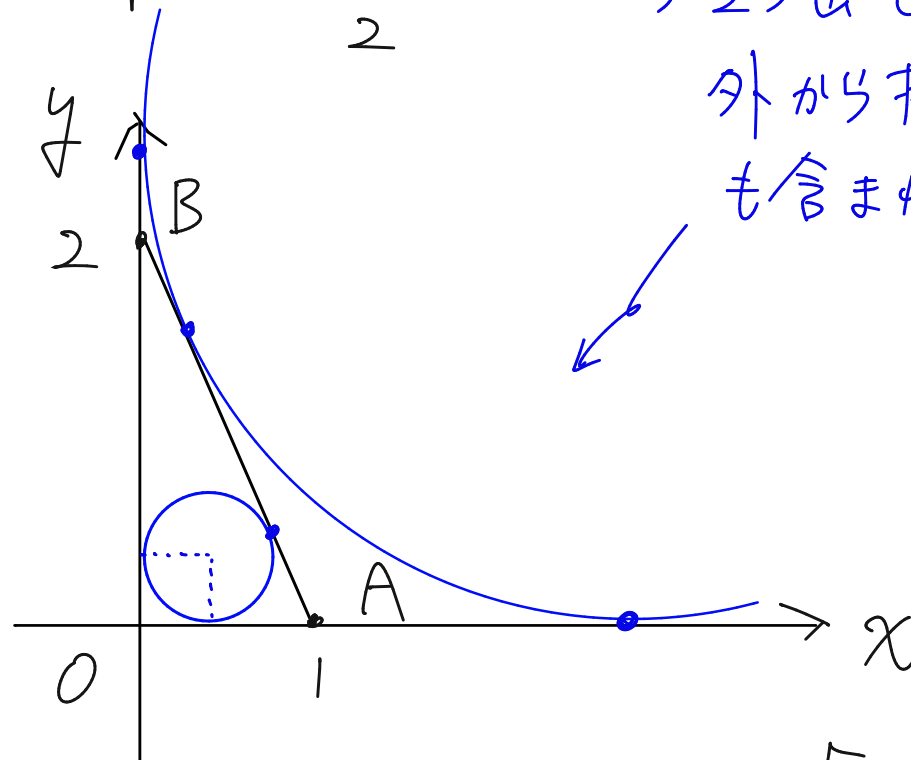
$$5r^2 = (3r - 2)^2$$

$$r^2 - 3r + 1 = 0$$

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

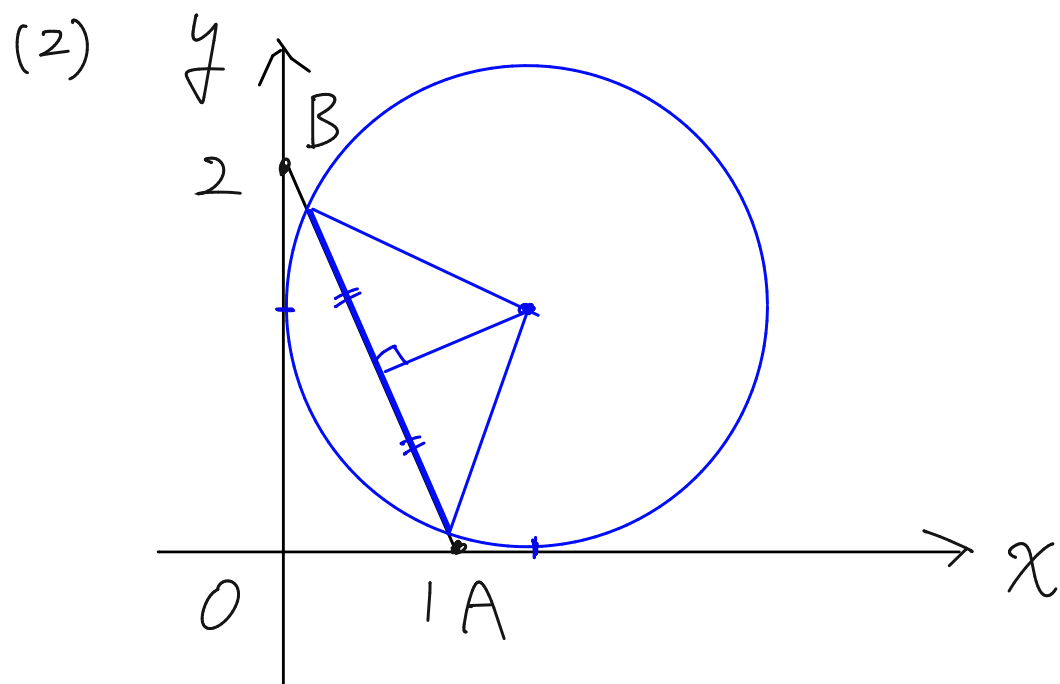
→ $2 >$ 出てくる...?

外から接するケースも含まれる!



題意に適するのは $r = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (以下略)

$r = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ が (2) に活きてくる。



円が動くので、作戦としては、

- 1 円を設定 ← 変数が必要
- 2 ABと2点で交わる条件を考える
- 3 PQをmaxにする。

題意より、正の実数 s を用いて、

円の中心は (s, s) 、半径は s と表せる。

1変数でOK. ①終了。

この円と直線ABが2つの交点を持つ条件は、

$$\frac{|3s-2|}{\sqrt{5}} < s \quad \leftarrow (1) \text{の考え方②が使える。}$$

$$\Leftrightarrow (3s-2)^2 < 5^2 \quad (\text{というか解もわかる})$$

$$\Leftrightarrow s^2 - 3s + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < s < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \uparrow \text{②完了。}$$

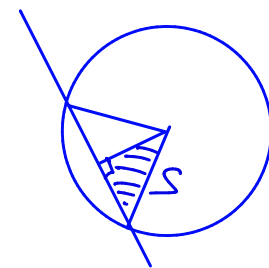
これは $s > 0$ を満たす。

このもとで、 PQ^2 を考えると、
三平方の定理より、

$$PQ^2 = 4 \left(s^2 - \left(\frac{|3s-2|}{\sqrt{5}} \right)^2 \right)$$

弦の半分の2乗

2乗の方が考えやすい



$$\begin{aligned}
 PQ^2 &= 4 \left(s^2 - \left(\frac{|3s-2|}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) \\
 &= 4 \left(s^2 - \frac{9s^2 - 12s + 4}{5} \right) \\
 &= \frac{-16s^2 + 48s - 16}{5} \\
 &= -\frac{16}{5} \left(\left(s - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \right) \quad \text{となるので、}
 \end{aligned}$$

$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < s < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ の範囲での最大値
 は $s = \frac{3}{2}$ のときの 4 である。

ここで、 PQ^2 が最大するとき $PQ (>0)$ も
 最大となるので、 PQ の最大値は 2 ~~##~~
 である。