積分・計算と方程式④　九州大学 2019 理系第1問

n を自然数とする。x, y がすべての実数を動くとき、定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 \, dt$$

の最小値を I_n とおく。極限 $\lim_{n \to \infty} I_n$ を求めよ。

やる気のないときの演習にも

$\boxed{\text{頭の中}}$

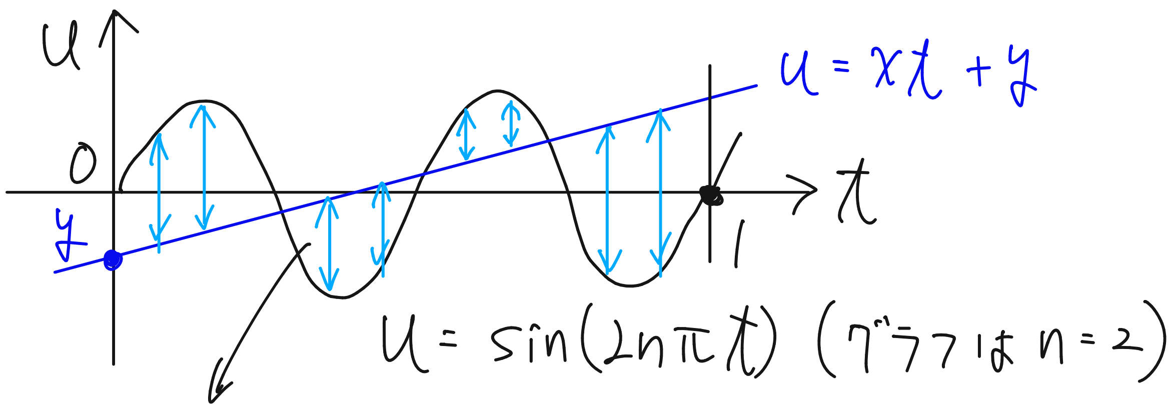
$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 \, dt$ は、頑張れば

計算できる。でも6項出てくるのでメンドい。

グラフで考えてラクできないか？

$(\sin(2n\pi t) - xt - y)^2$ は、$u = \sin(2n\pi t)$ と

$u = xt + y$ の差の2乗。つまり



この2乗を0〜1まで足し合わせたもの

→ 最小にする x, y は？

→ わからん…

→ 覚悟を決めて定積分する。 → 答案！

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 \, dt$$

$$= \int_0^1 \left(\sin^2(2n\pi t) + x^2t^2 + y^2 - 2xt\sin(2n\pi t) - 2y\sin(2n\pi t) + 2xyt\right) dt \quad \cdots ①$$

☆ (xt+y) をかたまりとしてもOK（慣れてる方向け）

☆ ミスを減らすために分割して考えていく。

ここで、

・ $\displaystyle\int_0^1 \sin^2(2n\pi t)\, dt = \int_0^1 \frac{1 - \cos(4n\pi t)}{2}\, dt$

$$= \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{8n\pi}\sin(4n\pi t)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

- $\displaystyle\int_0^1 x^2 t^2\,dt = x^2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \underline{\frac{x^2}{3}}$

- $\displaystyle\int_0^1 y^2\,dt = \underline{y^2}$

- $\displaystyle\int_0^1 2xt\sin(2n\pi t)\,dt$

$$= \left[-\frac{\cancel{2}xt}{\cancel{2}n\pi}\cos(2n\pi t)\right]_0^1 + \frac{x}{n\pi}\int_0^1 \cos(2n\pi t)\,dt$$

$$= -\frac{x}{n\pi} + \frac{x}{n\pi}\left[\frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi t)\right]_0^1$$

$$= \underline{-\frac{x}{n\pi}}$$

- $\displaystyle\int_0^1 2y\sin(2n\pi t)\,dt = 2y\left[-\frac{1}{2n\pi}\cos(2n\pi t)\right]_0^1 = \underline{0}$

- $\displaystyle\int_0^1 2xyt\,dt = 2xy\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$

$$= \underline{xy}$$

よって

$$① = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{3} + y^2 - \frac{x}{n\pi} + xy$$

→ 独立変数の2変数関数

→ 一文字固定（どっちがラク？）

$$= y^2 + xy + \frac{x^2}{3} - \frac{x}{n\pi} + \frac{1}{2}$$

$$= \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \underline{\frac{x^2}{12} - \frac{x}{n\pi} + \frac{1}{2}}$$

ここを最小にしたい

$$= \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x - \frac{6}{n\pi}\right)^2 - \frac{3}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2}$$

となるので.

$$y = -\frac{x}{2} \quad かつ \quad x = \frac{6}{n\pi}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{6}{n\pi}, -\frac{3}{n\pi}\right) のとき$$

最小値 $-\dfrac{3}{n^2\pi^2} + \dfrac{1}{2}$ をとる。

よって $I_n = -\dfrac{3}{n^2\pi^2} + \dfrac{1}{2}$ なので.

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2} \quad となる。$$