

名古屋大学 2023 理系第3問

- (1) 方程式 $e^x = \frac{2x^3}{x-1}$ の負の実数解の個数を求めよ。
- (2) $y = x(x^2 - 3)$ と $y = e^x$ のグラフの $x < 0$ における共有点の個数を求めよ。
- (3) a を正の実数とし、関数 $f(x) = x(x^2 - a)$ を考える。 $y = f(x)$ と $y = e^x$ のグラフの $x < 0$ における共有点は 1 個のみであるとする。このような a がただ 1 つ存在することを示せ。

☆初見での思考プロセスは前回動画で!
 ☆実数解と共有点 (式とグラフ) は行き来
 する意識を!

(1) 直接解けないのでグラフで検討。
 → 片方にまとめて関数の増減を
 考える。

$$f(x) = e^x - \frac{2x^3}{x-1} \quad \text{とおく。}$$

$$f'(x) = e^x - \frac{6x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^2}$$

$$= e^x - \frac{4x^3 - 6x^2}{(x-1)^2} \rightarrow \text{何回微分しても } =0 \text{ は解けない!}$$

定性的な情報を
 探す。(グラフで考えても
 気付ける(前回))

ここで、 $x < 0$ のもとで、
 $e^x > 0, \quad \frac{4x^3 - 6x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2(2x-3)}{(x-1)^2} < 0$

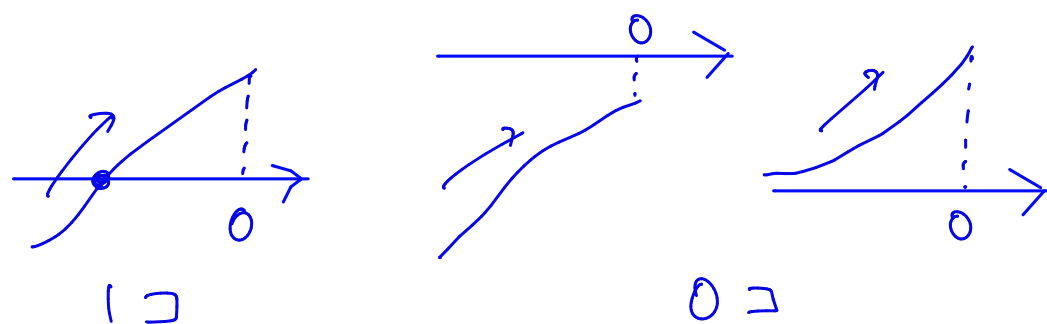
なので、 $f'(x) > 0$ である。

=0 は考えられないが、

$f(x)$ の増減を考えるのに必要な
 $f'(x)$ の符号はわかった!!

よって $x < 0$ で $f(x)$ は 狭義単調増加
 である。

あと何がわかればいい?
 両端の状況 + 連続性



いま、 $g(0) = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x - \frac{2x^2}{1 - \frac{1}{x}} \right)$$

$$= -\infty$$

なぜ??

であり、 $g(x)$ は $x \leq 0$ で連続なので

$$g(x) = 0 \iff e^x = \frac{2x^3}{x-1}$$

は $x < 0$ に 1つ 実数解をもつ。

(2) 前回は2つのグラフから考察したが、面倒なので、(1)と同様に1つにまとめてグラフの増減を調べる。

$$h_1(x) = e^x - x(x^2 - 3) \text{ とおき、}$$

$y = h_1(x)$ が $x < 0$ で x 軸との共有点を何個持つか調べる。

$$h_1'(x) = e^x - 3x^2 + 3$$

→ この段階ではまだわからない。
もう1回セグ

$$h_1''(x) = e^x - 6x$$

これは正負わかる!!

$x < 0$ のとき $h_1''(x) > 0$ なので、

$x < 0$ で $h_1'(x)$ は狭義単調増加。

→ ここから $h_1'(x)$ の符号を知りたいので
端を調べる!

$$\text{ここで } h_1'(0) = 4 > 0$$

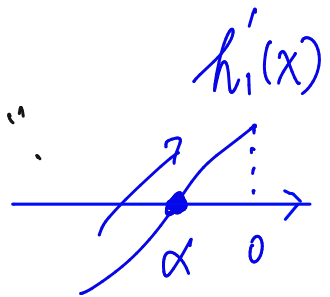
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h_1'(x) = -\infty \text{ であり、}$$

$h_1'(x)$ は $x \leq 0$ で連続なので、

$h_1'(x) = 0$ は $x < 0$ に

1つ解をもち、それを

$x = \alpha$ とおく。わからないときは置く!



→ これで $h_1(x)$ の増減わかった!!

このとき $h_1(x)$ の $x < 0$ での増減は

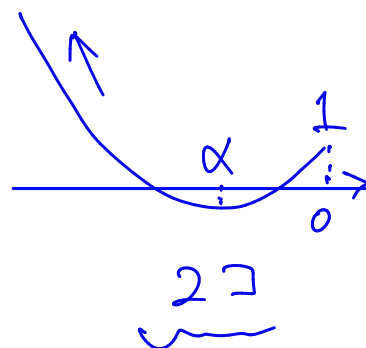
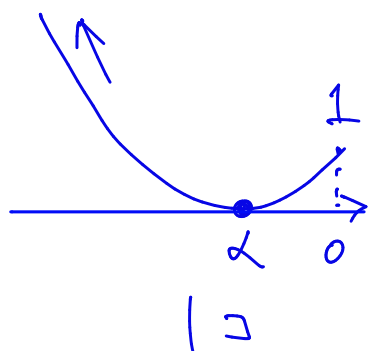
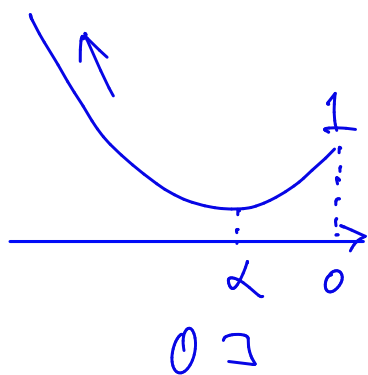
x	...	α	...	0
$h_1'(x)$	-	0	+	
$h_1(x)$	$(\infty) \searrow$		$\nearrow$	1

となる。

二辺の値が大事! わかるとこから

$$\begin{pmatrix} h_1(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} h_1(x) = \infty \end{pmatrix}$$

→ また可能性は3つある!!



でも、 $h_1(\alpha)$ は求められない。

(α は $h_1'(\alpha) = 0$ の解で $e^\alpha - 3\alpha^2 + 3 = 0$ を満たすが、そこから $e^\alpha - \alpha(\alpha^2 - 3)$ の値は求められん!)

ただ、 $y = e^x$ と $y = x(x^2 - 3)$ のグラフを書くと、2つでありそうな交点はある。(前回も参照)

→ 負の値をとる x が見つかる が OK!!

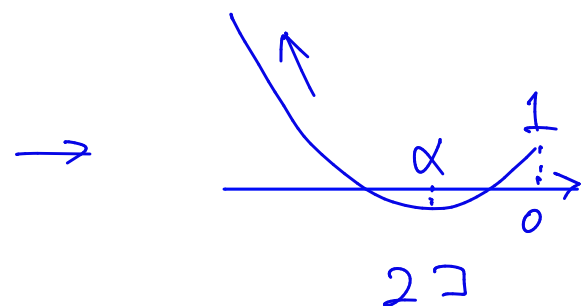
$x = -1$? $x = -2$? このあたり、求めやすいもの

ここで、 $h_1(-1)$ を考えると、

$$\begin{aligned} h_1(-1) &= e^{-1} - 2 \\ &= \frac{1}{e} - 2 < 0 \text{ であるので、} \end{aligned}$$

よし! +!

$x < 0$ での最小値 $h_1(\alpha) < 0$ を得る。



が確定!

$h_1(x)$ は $x \leq 0$ で連続なので、増減を
考えて、 $x < 0$ で x 軸と 2つの共有点 を
もつ。

(3) (2) と同じようにいけそう。

$h_2(x) = e^x - x(x-a)$ とおき、

$y = h_2(x)$ が $x < 0$ で x 軸との共有点
を 1個 持つような $a(>0)$ の個数を考える。

$$h_2'(x) = e^x - 3x^2 + a$$

→ この段階ではまだわからない。
もう1回ゼン

$$h_2''(x) = e^x - 6x \quad \text{これは正負わかる!!}$$

$x < 0$ のとき $h_2''(x) > 0$ なので、

$x < 0$ で $h_2'(x)$ は狭義単調増加。

→ ここから $h_2'(x)$ の符号を知りたいので
端を調べろ!

$$\text{ここで } h_2'(0) = 1 + a > 0 \quad (\because a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h_2'(x) = -\infty \quad \text{であり、}$$

$h_2'(x)$ は $x \leq 0$ で連続なので、

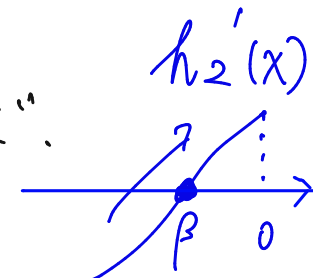
$h_2'(x) = 0$ は $x < 0$ に

1つ解をもち、それを

$x = \beta$ とおく。 わからないときは置く!

→ これで $h_2(x)$ の増減わかった!!

こら辺はまだ(2)と全く同じ



このとき $h_2(x)$ の $x < 0$ での増減は

x	$\dots$	β	$\dots$	0
$h_2'(x)$	$-$	0	$+$	
$h_2(x)$	$(\infty) \searrow$		$\nearrow$	1

となる。

$h_2(x)$ は $x \leq 0$ で連続なので、
 $y = h_2(x)$ が $x < 0$ で x 軸との共有点
 を 1個 持つような a の条件は

$$h_2(\beta) = 0$$

である。以下、

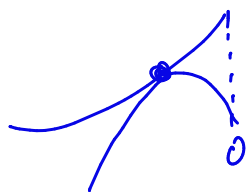
$$\begin{cases} h_2'(\beta) = 0 \\ h_2(\beta) = 0 \end{cases} \leftarrow \beta \text{ の定義}$$

実は $x = \beta$ で
接する条件!

↓
グラフを
考えると
納得

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^\beta - 3\beta^2 + a = 0 \dots ① \\ e^\beta - \beta(\beta^2 - a) = 0 \dots ② \end{cases}$$

を満たす $a (> 0)$ の個数を
調べる。



$$\textcircled{1} \text{より } a = 3\beta^2 - e^\beta \dots \textcircled{1}'$$

②に代入すると

$$e^\beta - \beta(\beta^2 - (3\beta^2 - e^\beta)) = 0$$

$$(\beta - 1)e^\beta = 2\beta^3$$

$\beta < 0$ より $\beta - 1 \neq 0$ であり、 $\leftarrow 0$ では割れない

$$e^\beta = \frac{2\beta^3}{\beta - 1} \dots \textcircled{3} \text{ を得る。}$$

(1) の議論より、

$$e^x = \frac{2x^3}{x-1} \text{ は } x < 0 \text{ にただ1つの}$$

実数解をもつので、③を満たす $\beta (< 0)$
はただ1つ存在し、それに対して

①' で a が定まる。

$\rightarrow$ あとはこれが $a > 0$ を満たすか!

その符号を確認すると、

$$a = 3\beta^2 - e^\beta \rightarrow \text{このままじゃわかりん}$$

$$= 3\beta^2 - \frac{2\beta^3}{\beta-1} \quad (\because \textcircled{2})$$

$$= \frac{3\beta^2(\beta-1) - 2\beta^3}{\beta-1}$$

$$= \frac{\beta^2(\beta-3)}{\beta-1} \quad \text{よ'}、$$

↓ 積・商の形へ

$\beta < 0$ のとき $a > 0$ となるので、

①② を満たす $a(>0)$ は ただ一つ
存在することが示された。 