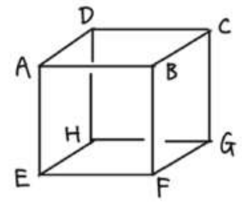
名古屋大学 2017 理系第2問

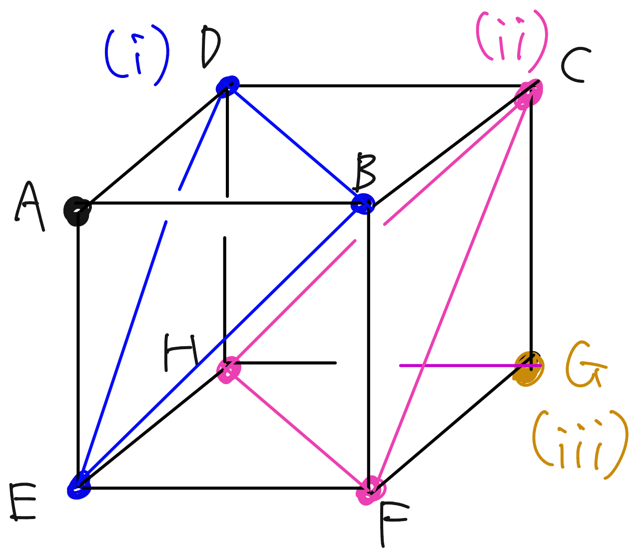


右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は、今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。
たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると、時刻 $n+1$ では、それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D, E, G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して、(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 B, D, E のいずれかにいる確率を p_n、(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 C, F, H のいずれかにいる確率を q_n、(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) p_2, q_2, r_2 と p_3, q_3, r_3 を求めよ。
(2) $n \geqq 2$ のとき、p_n, q_n, r_n を求めよ。
(3) 自然数 $m \geqq 1$ に対して、点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。
(4) 自然数 $m \geqq 2$ に対して、点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき、$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。

☆確率の一般項

→ { 直接求める
　　漸化式で求める → { 初手で分ける
　　　　　　　　　　　　終わりで分ける



どうせ漸化式作るので、最初に考えちゃいましょう.

設定を正しく把握 → 具体化 → 抽象化

(1) 〈頭の中〉

(i)のグループ

A → B, D, E に確率 $\frac{1}{3}$ で移る

B → A, C, F 〃

$\frac{1}{3}$ 　$\frac{2}{3}$ で(ii)へ

D → A, C, H 〃

$\frac{1}{3}$ 　$\frac{2}{3}$

E → A, F, H 〃

$\frac{1}{3}$ 　$\frac{2}{3}$

ということは、

$p_n \xrightarrow{\frac{1}{3}}$ × ドボン (Aに戻る)

$p_n \xrightarrow{\frac{2}{3}} q_{n+1}$

どの点でも!

同様に、C, F, H どこにいても、

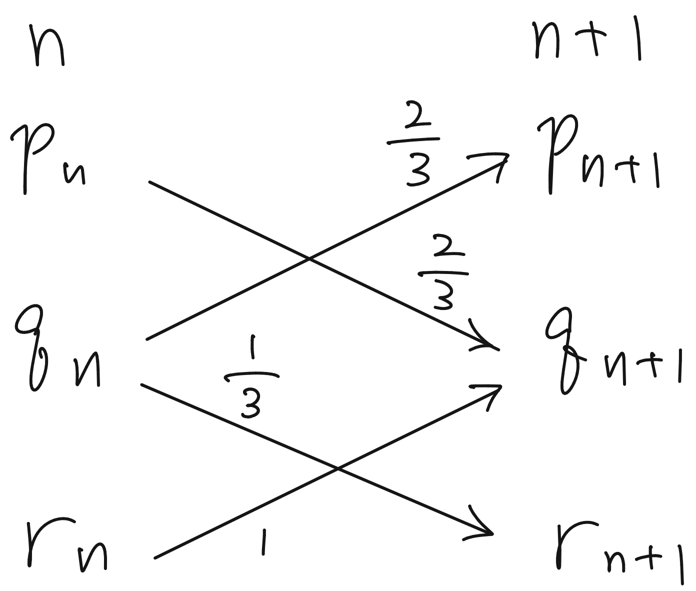
ex) C 　$q_n \xrightarrow{\frac{2}{3}} p_{n+1}$ 　B, D

$q_n \xrightarrow{\frac{1}{3}} r_n$ 　G 　となるな.

Gからは C, F, H なので全て(ii)へ

→ 推移図書けそう.

題意より、時刻 $n \to n+1$ の変化は以下のように表せる。 ↓答案



よって以下の漸化式を得る。

$$
\begin{cases}
p_{n+1} = \frac{2}{3} q_n & \cdots ① \\
q_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + r_n & \cdots ② \\
r_{n+1} = \frac{1}{3} q_n & \cdots ③
\end{cases}
$$

→ 解いてもいいが、まず $n=1,2$ で求める。

いま、時刻1ではB, D, Eにいるので、

$p_1 = 1,\ q_1 = 0,\ r_1 = 0$ である。

よって①〜③より、

$p_2 = 0,\ q_2 = \frac{2}{3},\ r_2 = 0$

$p_3 = \frac{4}{9},\ q_3 = 0,\ r_3 = \frac{2}{9}$ となる。

☆足して1にならない点に注意!!

(2) ①,③で p と r を q で表せるので、②に代入して q だけにする。

①③を②に代入して、

$$
\begin{aligned}
q_{n+1} &= \frac{4}{9} q_{n-1} + \frac{1}{3} q_{n-1} \quad (n \geqq 2) \\
&= \frac{7}{9} q_{n-1}
\end{aligned}
$$

1コとばし!!

よって q_n の一般項は

$$q_n = \begin{cases} 0 & (n:\text{奇数のとき}) \\ \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} & (n:\text{偶数のとき}) \end{cases}$$

これは $n \geqq 1$ で成立

※苦手な方は $2k$ とか $2k-1$ とかで考えよう
(別動画参照.)

☆必ず小さい n で確認しよう!

①より

$$p_{n+1} = \begin{cases} 0 & (n:\text{奇数}) \\ \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} & (n:\text{偶数}) \end{cases} \quad (n \geqq 1)$$

なので, $n \to n-1$ に変えて, $n \geqq 2$ のとき

$$p_n = \begin{cases} \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n:3\text{以上の奇数}) \\ 0 & (n:\text{偶数}) \end{cases}$$

※問題が $n \geqq 2$ のときなのでこれでOK
$n=1$ は別扱いが必要.

③より.

$$r_{n+1} = \begin{cases} 0 & (n:\text{奇数}) \\ \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-2}{2}} & (n:\text{偶数}) \end{cases} \quad (n \geqq 1)$$

なので, $n \to n-1$ に変えて, $n \geqq 2$ のとき

$$r_n = \begin{cases} \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n:3\text{以上の奇数}) \\ 0 & (n:\text{偶数}) \end{cases}$$

(3) 状況を具体化して考える!

Aに戻れるのは?

$\underbrace{B, D, E}_{\text{(i)のグループ}} \to A$ (確率 $\frac{1}{3}$)

→ 直接求められる.

頂点 B, D, E から確率 $\frac{1}{3}$ で A に戻るので、求める確率 S_m は、

$$\underbrace{S_m}_{\text{時刻}2m\text{で初めてAに戻る}} = \frac{1}{3} \times \underbrace{P_{2m-1}}_{\text{Aに戻ってなくて、時刻}2m-1\text{でB,D,Eにいる}}$$

$m=1$ だと P_1 なので、(2) の式は使えない!!

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{3} & (m=1) \leftarrow P_1 = 1 \text{ より} \\ \dfrac{4}{27}\cdot\left(\dfrac{7}{9}\right)^{m-2} & (m \geqq 2) \end{cases}$$

(4) どういうことか？

1回戻って、またAからスタート 時刻リセット

→ 1回目に戻る時刻で分けたら直接求められそう。

P_n は n が偶数のとき 0 なので、奇数時刻にAに戻ることはない。

時刻 2ℓ (ℓ は自然数, $\ell < m$) でAに初めて戻り、その後時刻 $2m$ ($m \geqq 2$) で2回目にAに戻る確率は、

$S_\ell \times S_{m-\ell}$ で求められる。

$$A \xrightarrow[2\ell]{} A \xrightarrow[2(m-\ell)]{} A$$

よって t_m は

$$t_m = \sum_{\ell=1}^{m-1} S_\ell \cdot S_{m-\ell} \quad \text{と表せる。}$$

S_1 に注意!! 両サイドにある

$m=2$ のとき、

なぜ分ける??

$$t_2 = \underset{\frac{1}{3}}{S_1} \cdot \underset{\frac{1}{3}}{S_1} = \frac{1}{9}$$

$m=3$ のとき、

$$t_3 = S_1 \cdot S_2 + S_2 \cdot S_1$$
$$= 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{27} = \frac{8}{81}$$

$m \geqq 4$ のとき、

$m-1 \geqq 2$

$$t_m = \underbrace{\frac{1}{3}}_{S_1} \times S_{m-1} + S_{m-1} \times \underbrace{\frac{1}{3}}_{S_1}$$
$$+ \sum_{\ell=2}^{m-2} \underline{\frac{4}{27} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{\ell-2}} \cdot \underline{\frac{4}{27} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{m-\ell-2}}$$
$$= \frac{8}{81} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{m-3} + \frac{16}{729} \sum_{\ell=2}^{m-2} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}$$

ℓ ない!

$$= \frac{8}{81} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{m-3} + \frac{16}{729} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{m-4} \cdot (m-3)$$

$m \geqq 2$ において、t_m と S_m の大小を考えると、

$m=2$, $m=3$, $m \geqq 4$

~~$m=1$~~ $m \geqq 2$ → $m=2, 3$ は別扱い!

・$m=2$ のとき

$$S_2 = \frac{4}{27}, \quad t_2 = \frac{1}{9} \text{ より}$$
$$S_2 > t_2$$ OK

・$m=3$ のとき、

$$S_3 = \frac{28}{243}, \quad t_3 = \frac{8}{81} \text{ より}$$
$$S_3 > t_3$$ OK

・$m \geqq 4$ のとき、

$$S_m = \frac{4}{27} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$
$$t_m = \frac{8}{81} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{m-3} + \frac{16}{729} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{m-4} \cdot (m-3)$$

より $S_m - t_m$

$$= \frac{4}{729} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{m-4} \cdot \left(27 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^2 - 18 \cdot \left(\frac{7}{9}\right) - 4(m-3)\right)$$

正負調べるのでくくる

$$= \frac{4}{729} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{m-4} \cdot \left(\underbrace{\frac{43}{3} - 4m}_{\text{ここが決める}}\right)$$ となるが、

$m \geqq 4$ のとき $\frac{43}{3} - 4m < 0$ なので

常に $S_m < t_m$ となる。 → ダメ

以上より、$t_m < S_m$ となる m $(m \geqq 2)$

は $m = 2, 3$ のみである。