

九州大学 2022 文系第3問

k を実数とし、整式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 + 6x^3 - kx^2 + 2kx - 64$$

で定める。方程式 $f(x) = 0$ が虚数解をもつとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ は $x - 2$ で割り切れることを示せ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ は負の実数解をもつことを示せ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ のすべての実数解が整数であり、すべての虚数解の実部と虚部がともに整数であるとする。このような k をすべて求めよ。

動画や公式を検索しやすいアプリ okke



(1) 因数定理:

多項式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れる

$$\Leftrightarrow P(\alpha) = 0$$

$$f(2) = 16 + 48 - 4k + 4k - 64 \\ = 0 \text{ より、}$$

因数定理から $f(x)$ は $x-2$ で
割り切れる。 

$$(2) f(x) = x^4 + 6x^3 - kx^2 + 2kx - 64 \\ = \underline{(x-2)(x^3 + 8x^2 - (k-16)x + 32)}$$

暗算で!

$$\text{よって、} x^3 + 8x^2 - (k-16)x + 32 = 0 \dots \textcircled{1}$$

が負の実数解を持つことを

示せばよい。

困難は分割せよ!

解けない! $\rightarrow$ グラフでいか、 or
3次だし 解と係数か。

$\rightarrow$ (3)を見越して後者でまずは
 $\rightarrow$ 解の情報を集めろ。

題意より、 $\textcircled{1}$ は虚数解をもち、

$\textcircled{1}$ の左辺の係数は実数なので、 その

共役な複素数も解になる。 良問35/100

よって、 $\textcircled{1}$ の3つの解は、実数 a, b, c を
用いて $x = a, b \pm ci$ と表せる。

解と係数の関係より

$$\begin{cases} a + (b+ci) + (b-ci) = -8 \\ a(b+ci) + a(b-ci) + (b+ci)(b-ci) = -(k-16) \\ a(b+ci)(b-ci) = -32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = -8 & \dots (2) \\ 2ab + b^2 + c^2 = -(k-16) & \dots (3) \\ a(b^2 + c^2) = -32 & \dots (4) \end{cases}$$

$a < 0$ を示したい!

→ 積の形に注目. (4) が使える.

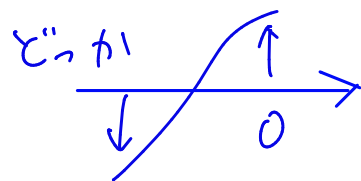
$$b, c \in \mathbb{R} \text{ より } b^2 + c^2 \geq 0$$

よって (4) より $a < 0$ となり、(1) が負の実数解をもつことが示された。 

<別解> グラフの情報で (若干数Ⅲ)

$$g(x) = x^3 + 8x^2 - (k-16)x + 32$$

→ $x < 0$ で x 軸と交わることを示すには?



$$g(0) = 32 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty < 0 \quad \text{かつ}$$

$g(x)$ は連続関数なので、

$g(x) = 0$ は $x < 0$ に実数解をもつ。

(3) 情報を整理! 3次方程式の方に注力!
 $x = 2$ は整数解であり、

⑤ $a, b, c \in \mathbb{Z}$, かつ c も 0 虚数解 なので!
 のもとで、(2)(3)(4) を満たす
 k の値を全て求めればよい。

↑ 3次方程式の解が

$$x = a, b \pm ci$$

$$\Leftrightarrow (2)(3)(4) \text{ が成り立つ}$$

あとは整数問題!

→ 積の形 に注目. (4) から

$b, c \in \mathbb{Z}$ か $c \neq 0$ より

$$b^2 + c^2 \geq 1 \quad \leftarrow \text{範囲を絞る.}$$

なので、④より

$$(a, b^2 + c^2) = (-32, 1)(-16, 2)(-8, 4) \\ (-4, 8)(-2, 16)(-1, 32)$$

これで絞れた!

このうち、 $b, c \in \mathbb{Z}$ か $c \neq 0$ を満たす
ものを考えると、候補は

$$(a, b, c) = (-32, 0, \pm 1)(-16, \pm 1, \pm 1) \\ (-8, 0, \pm 2)(-4, \pm 2, \pm 2) \\ (-2, 0, \pm 4)(-1, \pm 4, \pm 4)$$

このうち、②を満たすのは

$$(a, b, c) = (-8, 0, \pm 2)(-4, -2, \pm 2)$$

のみであり、それぞれについて③より、

$$-(k-16) = 4, 24$$

$$k = -8, 12$$

となり、これが求める k の値である。

★ オク!