大阪大学 2023 文系第1問

a, b を実数とする。θ についての方程式

$$\cos 2\theta = a\sin\theta + b$$

が実数解をもつような点 (a, b) の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

誘惑のない動画や公式検索アプリ okke

$\cos 2\theta = a\sin\theta + b$
三角関数の解析はできないので、
cos か sin に統一、角度も統一して、
置換して実数解について考えられる式
にしたい

→ $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$ でOK.

$$\cos 2\theta = a\sin\theta + b$$
$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2\theta = a\sin\theta + b$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2\theta + a\sin\theta + b - 1 = 0 \quad \cdots ①$$

ここで、$t=\sin\theta$ とおくと、
① は $2t^2+at+b-1=0 \quad \cdots ②$
と表される。

2次方程式の実数解
ならギロンできる!!

① が実数解 θ をもつような (a, b) の
条件と、② が $-1\leqq t\leqq 1$ に実数解 t
を持つような (a, b) の条件は同値で
あるから、② について考える。

① が実数解 θ をもつ $\Leftrightarrow$ ② が $-1\leqq t\leqq 1$
に実数解 t をもつ

※解の個数は異なりうるので注意!
その対応はわかりますか??

あとは解の配置!! (良問⑤)

→ どう場合分けしていく?? ここが大事.

軸の位置で分けてもいいが、$-1\leqq$ 軸 $\leqq 1$
のときが若干めんどい.
→ 実数解の個数で分けると割とラク

②が $-1\leqq t\leqq 1$ に実数解を持つ (a,b) の条件は、

②の左辺を $f(t)$ とおくと、

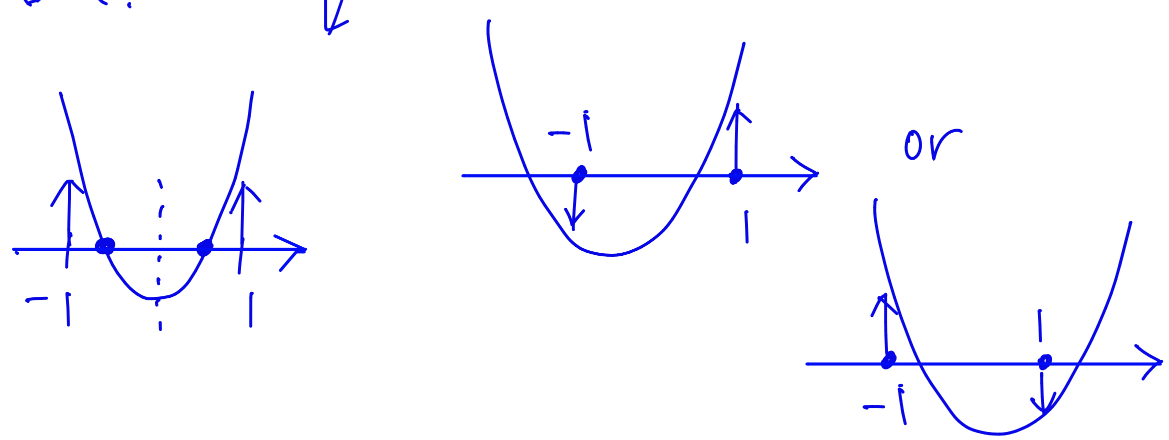
$$f(t)=2\left(t+\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{8}+b-1$$ より、

$$\begin{cases} D=a^2-8(b-1)\geqq 0 \\ -1\leqq -\dfrac{a}{4}\leqq 1 \\ f(-1)=2-a+b-1\geqq 0 \\ f(1)=2+a+b-1\geqq 0 \end{cases}$$

又は $f(-1)f(1)\leqq 0$

となる。

なぜ??



→ 被りがあ(りえ)るのわかりますか?

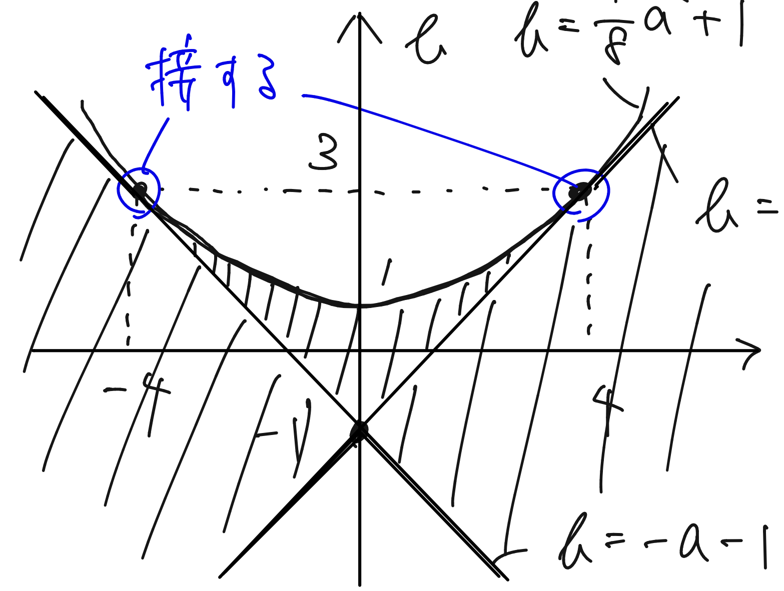
※ $-1<t<1$ だとこの2つだけだと不十分、なぜ?

$$\iff \begin{cases} b\leqq \dfrac{1}{8}a^2+1 \\ -4\leqq a\leqq 4 \\ b\geqq a-1 \\ b\geqq -a-1 \end{cases}$$

又は $\begin{cases} b\geqq a-1 \\ b\leqq -a-1 \end{cases}$

又は $\begin{cases} b\leqq a-1 \\ b\geqq -a-1 \end{cases}$

これを図示すると、



(境界全て含む)