

名古屋大学 2021 理系第2問 / 文系第2問

4 つの実数を $\alpha = \log_2 3$, $\beta = \log_3 5$, $\gamma = \log_5 2$, $\delta = \frac{3}{2}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha\beta\gamma = 1$ を示せ。

(2) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を小さい順に並べよ。

(3) $p = \alpha + \beta + \gamma$, $q = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ とし、 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ とする。このとき $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(-1)$ および $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ の正負を判定せよ。



$$\alpha = \log_2 3, \beta = \log_3 5, \gamma = \log_5 2, \delta = \frac{3}{2}$$

$$(1) \alpha\beta\gamma = \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2$$

log同士の積はどうしようもない。(真数の積ならlogの和)

→ 底をそろえて消していく

$$= \cancel{\log_2 3} \cdot \frac{\cancel{\log_2 5}}{\cancel{\log_2 3}} \cdot \frac{1}{\cancel{\log_2 5}}$$

※底は何でもOK.

$$= 1 \quad \text{となって示された。}$$

(2) 並び方は24通り $\leftarrow 4!$

全て調べるのはムリ.

基準が欲しい, 背の順と同じ,

たとえば"1との大きさを比べて."

(○と△は1より小さい
□と☆は1より大きい. とする.

→ あとは○vs△と□vs☆で済んだ.

今回も1との大きさはすぐわかる. 大事

$$\begin{cases} \alpha = \log_2 3 > 1 & (\log_2 2) \\ \beta = \log_3 5 > 1 & (\log_3 3) \\ \gamma = \log_5 2 < 1 & (\log_5 5) \rightarrow \text{確定} \\ \delta = \frac{3}{2} > 1 \end{cases}$$

であり、 α, β, δ を比較する。

底をそろえて真数を比べる.

$$\delta = \log_2 2^{\frac{3}{2}} \rightarrow \alpha \text{ と比べる}$$

$$= \log_2 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}} < \log_2 \frac{3}{\sqrt{9}} = \alpha$$

$$\delta = \log_3 3^{\frac{3}{2}} \rightarrow \beta \text{ と比べる}$$

$$= \log_3 \underbrace{3\sqrt{3}}_{\sqrt{27}} > \log_3 \underbrace{5}_{\sqrt{25}} = \beta$$

よって $\gamma < \beta < \delta < \alpha$ となる。

たまたまスー-ズ"に行ったので、
 α と β の比較は不要になった。
 (α と β を比べるのは難しい)

(3) 素朴に代入 $\rightarrow$ わからない $\rightarrow$ グラフ処理

★ 対称式 $\rightarrow$ 基本対称式 で表せる。
 解と係数の関係と相称よい

$$g = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$$

$$= \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma = 1} = \underline{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}$$

基本対称式!

よって

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$$

$\rightarrow$ 特徴わからないので
 α, β, γ で表してみる。

$$= x^3 \oplus (\alpha + \beta + \gamma)x^2$$

$$+ (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x \oplus \underline{\alpha\beta\gamma} = 1$$

★ 因数分解 できる。

$$= (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) \quad \text{となる。}$$

解と係数の関係

$\rightarrow f(x) = 0$ は

$$\underline{x = -\alpha, -\beta, -\gamma} \text{ を 3 解 に持つ}$$

この大小は (2) で調べてる!

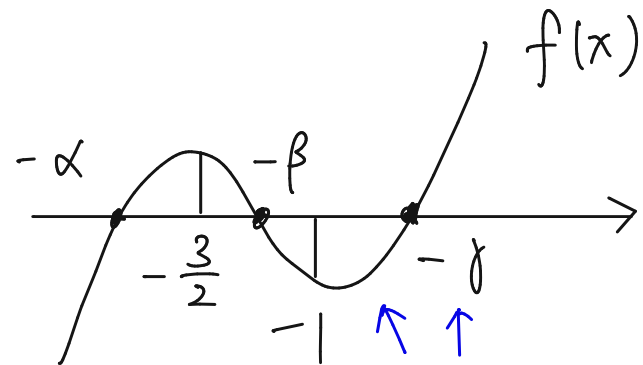
グラフの概形がわかる。

(今回は正負の判別なので
 グラフの特徴でいけそう)

ここで(2)より

$$-\gamma > -1 > -\beta > -\frac{3}{2} > -\alpha$$

となるので $f(x)$ のグラフは



となる。

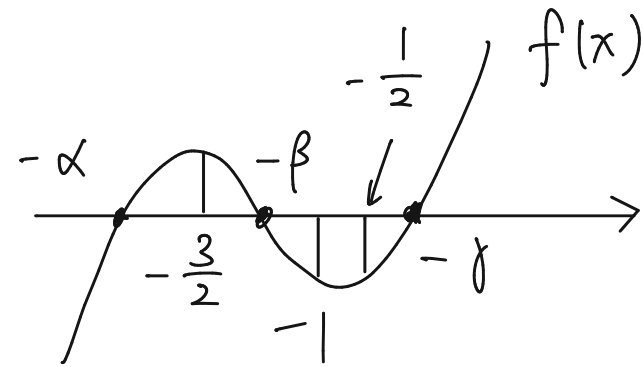
$-\frac{1}{2}$ がどこに入るか?
- γ との勝負

γ と $\frac{1}{2}$ の大小を比べると、

$$\frac{1}{2} = \log_5 \sqrt{5} > \log_5 2 = \gamma \text{ より}$$

$$\gamma < \frac{1}{2} \text{ . つまり } -\gamma > -\frac{1}{2} \text{ となる。}$$

よって $f(x)$ のグラフは



となるので、

$$f(-\frac{1}{2}) < 0, f(-1) < 0, f(-\frac{3}{2}) > 0$$

を得る。