

北海道大学 2024 文系第1問

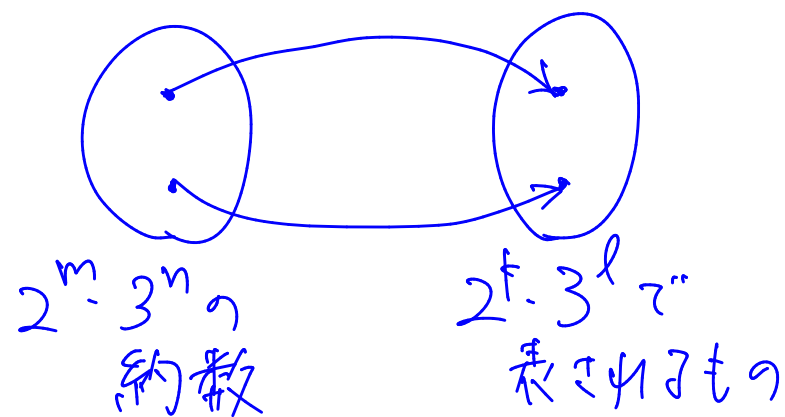
次の問に答えよ。

- (1) 自然数 m, n について、 $2^m \cdot 3^n$ の正の約数の個数を求めよ。
- (2) 6912 の正の約数のうち、12 で割り切れないものの総和を求めよ。



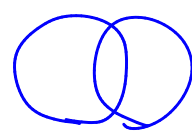
- (1) こういうときは導出的なものも合わせて書いていくようにしましょう!
自分の言葉で書くのは意外と難しいのでサボらずに練習を。

$2^m \cdot 3^n$ の正の約数は全て $2^k \cdot 3^l$
(k, l は $0 \leq k \leq m, 0 \leq l \leq n$ を満たす整数) の形で表され、1対1に対応する。
逆も(かりで)重複もない!



よってその個数は
 $(m+1)(n+1)$ 個と求められる。
 $k: m+1$ 通り, $l: n+1$ 通り

- (2) (1) の流れを組めとして。
まずは素因数分解から。
 6912 を素因数分解すると、
 $6912 = 2^8 \times 3^3$ である。

$12 = 2^2 \times 3$ で割り切れないとは...?
 6912 の正の約数は $2^{\textcircled{0}} \times 3^{\textcircled{1}}$ で
表され、 $\textcircled{0} < 2$ or $\textcircled{1} < 1$ だと割り切れない!
→  で考えよう。

直接書き上げても良いが、少し面倒。
約数の総和を求める式の原理に
立ち返って計算

※ ここから余事象も思いつけるとベスト
(あとで別解)

(i) 6912 の正の約数のうち、素因数 2 を 1 個以下もつものの総和は、

$$(2^0 + 2^1)(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)$$

展開を
意識!

$$= 3 \times 40$$

← これくらいは
直接でも

$$= 120$$

(ii) 6912 の正の約数のうち、素因数 3 を もたないものの総和は、

$$(2^0 + 2^1 + \dots + 2^8) \times 3^0$$

$$= \frac{1 - 2^9}{1 - 2}$$

← これは等比数列の公式が楽

$$= 512 - 1$$

$$= 511$$

(iii) 6912 の正の約数のうち、素因数 2 を 1 個以下もち、かつ素因数 3 を もたないものの総和は、

$$(2^0 + 2^1) \times 3^0 = 3 \quad \leftarrow \text{重複分}$$

となりので、6912 の正の約数のうち、
 $12 = 2^2 \times 3$ で割り切れないものの総和は

$$120 + 511 - 3 = \underline{\underline{628}} \quad \text{である。}$$

<補足>

この和!

		素因数 2 の個数					
		0	1	2	...	7	8
素 因 数 3 の 個 数	0						
	1						
	2						
	3						

12 の 倍数

<別解> 余事象で!

6912の正の約数の総和は

$$(2^0 + 2^1 + \dots + 2^8)(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)$$

$$= \frac{1-2^9}{1-2} \times 40$$

$$= 511 \times 40$$

$$= 20440$$

また、6912の正の約数のうち、素因数2を2個以上、3を1個以上もつもの、つまり

12の倍数の総和は ←これは一発でいける

$$(2^2 + 2^3 + \dots + 2^8)(3^1 + 3^2 + 3^3)$$

$$= \frac{4(1-2^7)}{1-2} \times 39$$

$$= 4 \times 127 \times 39 \quad \leftarrow \text{これが\"X\"ند\"ى}$$

$$= 19812$$

であるので、求めるものは

$$20440 - 19812 = \underline{\underline{628}} \quad \text{となる。}$$