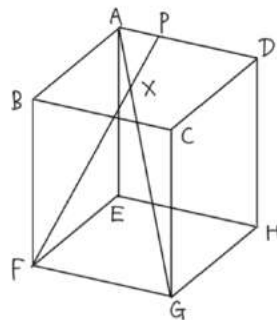


名古屋大学 2023 文系第2問

図のような 1 辺の長さが 1 の立方体 $ABCD - EFGH$ において、辺 AD 上に点 P をとり、線分 AP の長さを p とする。このとき、線分 AG と線分 FP は四角形 $ADGF$ 上で交わる。その交点を X とする。

- (1) 線分 AX の長さを p を用いて表せ。
- (2) 三角形 APX の面積を p を用いて表せ。
- (3) 四面体 $ABPX$ と四面体 $EFGX$ の体積の和を V とする。
 V を p を用いて表せ。
- (4) 点 P を辺 AD 上で動かすとき、 V の最小値を求めよ。



誘惑のない動画や公式検索アプリ okke



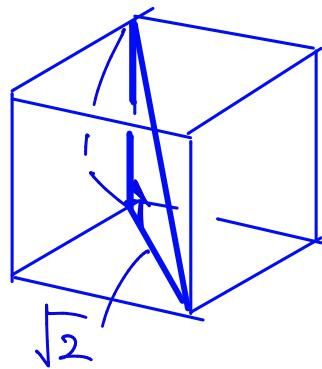
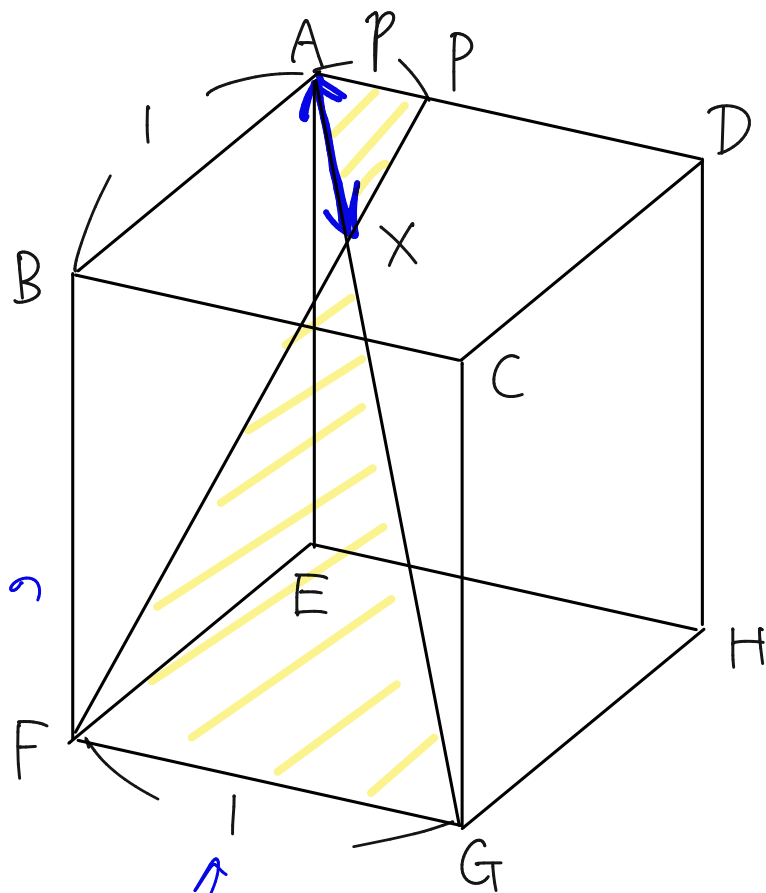
★求めたい図形量を求めるには、何がわかればよいかを考える!

(1) XはAGとPFの交点、

↓
AGの長さはすぐに分かるので、辺の長さの比がわかればAXがわかる

↓
比はこれに注目

$$AG = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ であり、}$$



$$AX : XG = AP : FG = p : 1 \text{ であり、}$$

$$AX = \sqrt{3} \times \frac{p}{p+1} = \frac{\sqrt{3}p}{p+1} \text{ となる。}$$

★妥当性チェック
(特徴的な値で!)

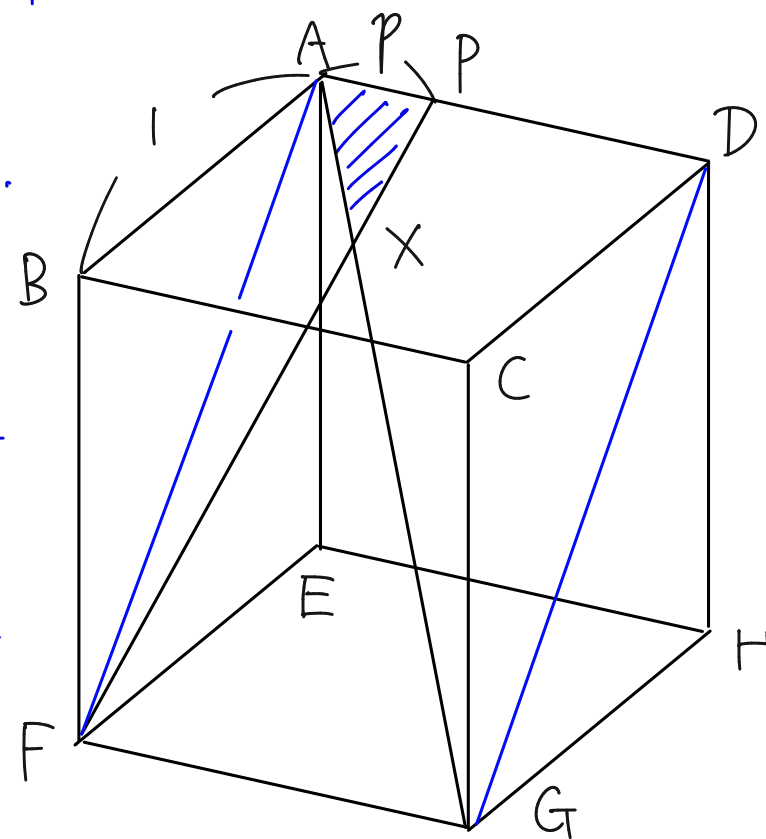
$$p \rightarrow 0, p \rightarrow 1$$

(2) いろんな考え方

① 直接求める?

→ $\sin \angle PAX$ があると必要

→ $\triangle AGD$ を考えればすぐに分かる



- ② 求めやすい三角形の力を借りる
 → $\triangle AFP$ ならすぐ求められる
 → $PX:XF$ はすぐわかるので
 それで求められる。

考え方①

$\triangle AGD$ を考えると、

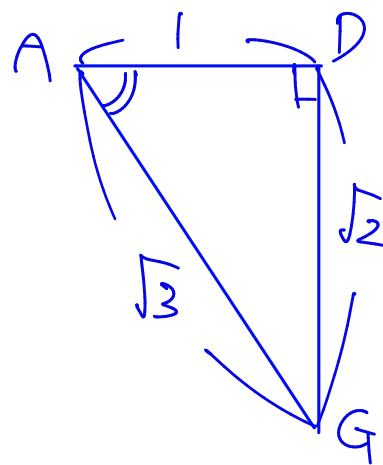
$$\sin \angle GAD = \frac{DG}{AG} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

よ'、

$$\triangle APX = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AX \cdot \sin \angle PAX$$

$$= \frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{\sqrt{3}p}{p+1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}p^2}{2p+2} \quad \text{となる。}$$



← (1) が使える

☆ 妥当性チェック
 (特徴的な値で!) $p \rightarrow 0, p \rightarrow 1$

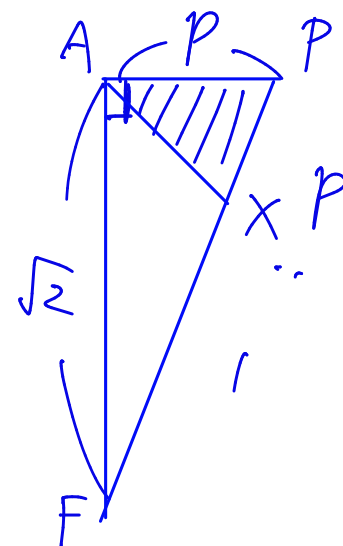
考え方②

$$\triangle AFP = \frac{1}{2} \cdot p \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} p$$

であ'、

$$PX:XF = AP:FG = p:1 \quad \text{よ'、}$$

$$\triangle APX = \triangle AFP \times \frac{p}{p+1} = \dots \text{(以下同様)}$$



(3) 四面体の体積

→ どこを底面と
高さとしよか。

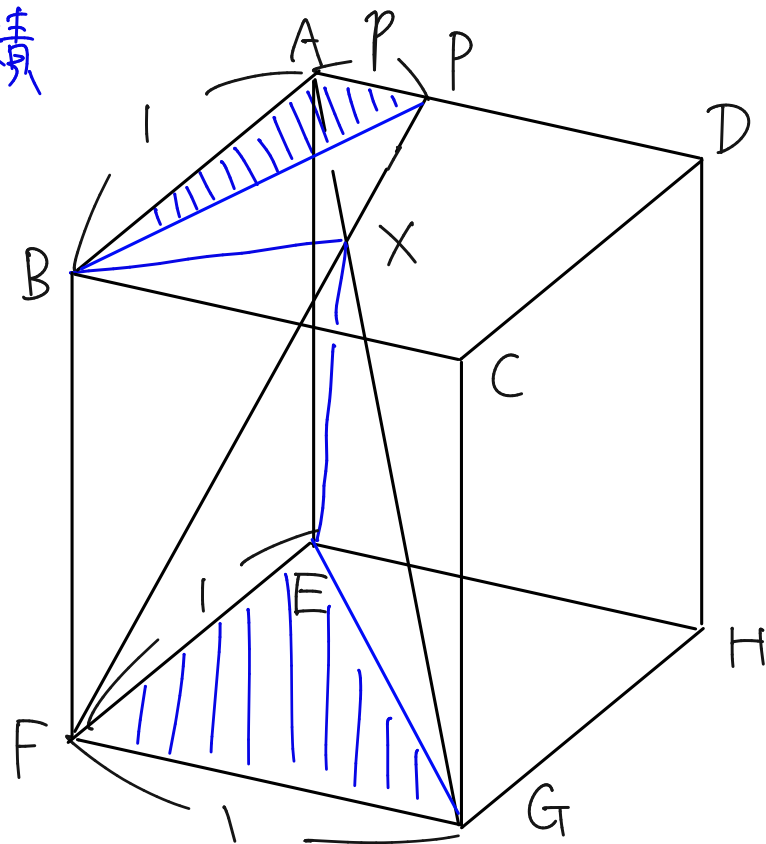
→ 求めやすい
ものを考えよ。

→ それぞれ

$\triangle APX$,
 $\triangle XFG$ を
底面とすると
大変!

→ $\triangle ABP$, $\triangle EFG$ を底面と見る。
あとは高さ、→ 相似を見抜く!

Xから平面ABPに下ろした垂線の長さ h_1
と、平面EFGに下ろした垂線の長さ h_2
の比は $h_1 : h_2 = p : 1$ であり、

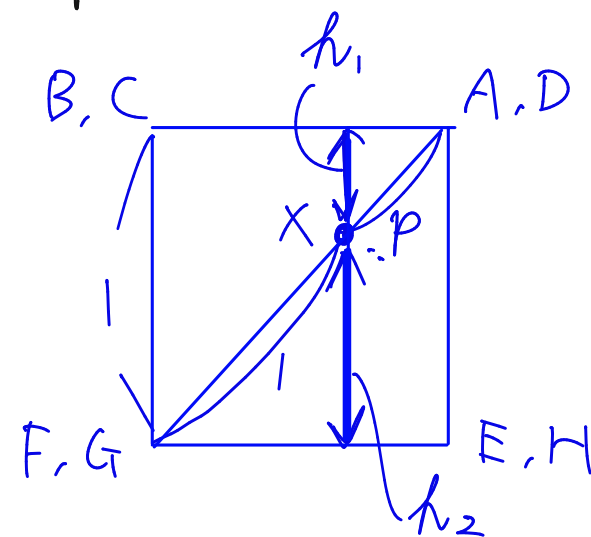


$h_1 + h_2 = 1$ であるので、

$$h_1 = 1 \times \frac{p}{p+1} = \frac{p}{p+1}$$

$$h_2 = 1 \times \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p+1} \quad \text{と求められる。}$$

立方体を横から
見るとわかりやすい



よって、

$$\begin{aligned} V &= \triangle ABP \times h_1 \times \frac{1}{3} + \triangle EFG \times h_2 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot p \cdot \frac{p}{p+1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{p^2 + 1}{6p + 6} \end{aligned}$$

と求められる。

★妥当性チェック!

$$(4) \quad V = \frac{p^2 + 1}{6p + 6} \quad \text{の } 0 \leq p \leq 1 \text{ での}$$

最小値を求める。

★分母関数のビ分は扱えない。

→ 分子を軽くできるときは軽くして、

相加相乗平均に持ちこむのが鉄則!

$$p^2 + 1 = (6p + 6) \left(\frac{1}{6}p - \frac{1}{6} \right) + 2 \quad \text{より、}$$

これは暗算!

$$V = \frac{1}{6}p - \frac{1}{6} + \frac{2}{6p + 6}$$

$$= \frac{1}{6}p - \frac{1}{6} + \frac{1}{3(p+1)}$$

↓
ここを $\triangle(p+1) + \triangle$ の形にできれば
相加相乗で p を消せる!!

$$= \frac{1}{6}(p+1) + \frac{1}{3(p+1)} - \frac{1}{3} \quad \text{これは別にOK}$$

$$\geq 2 \sqrt{\frac{1}{6}(p+1) \cdot \frac{1}{3(p+1)}} - \frac{1}{3} \quad (\because p+1 > 0)$$

↑
相加相乗平均の不等式

相加相乗平均
の前提!!

$$= 2 \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3} \quad \text{となり、}$$

$$\frac{1}{6}(p+1) = \frac{1}{3(p+1)}$$

また最小値は
わからない!!

$$\Leftrightarrow (p+1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow p+1 = \sqrt{2} \quad (\because p+1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow p = \sqrt{2} - 1$$

これは 定義域を満たし、このとき等号が
確かに成り立つので、 V の最小値は $\frac{\sqrt{2} - 1}{3}$