

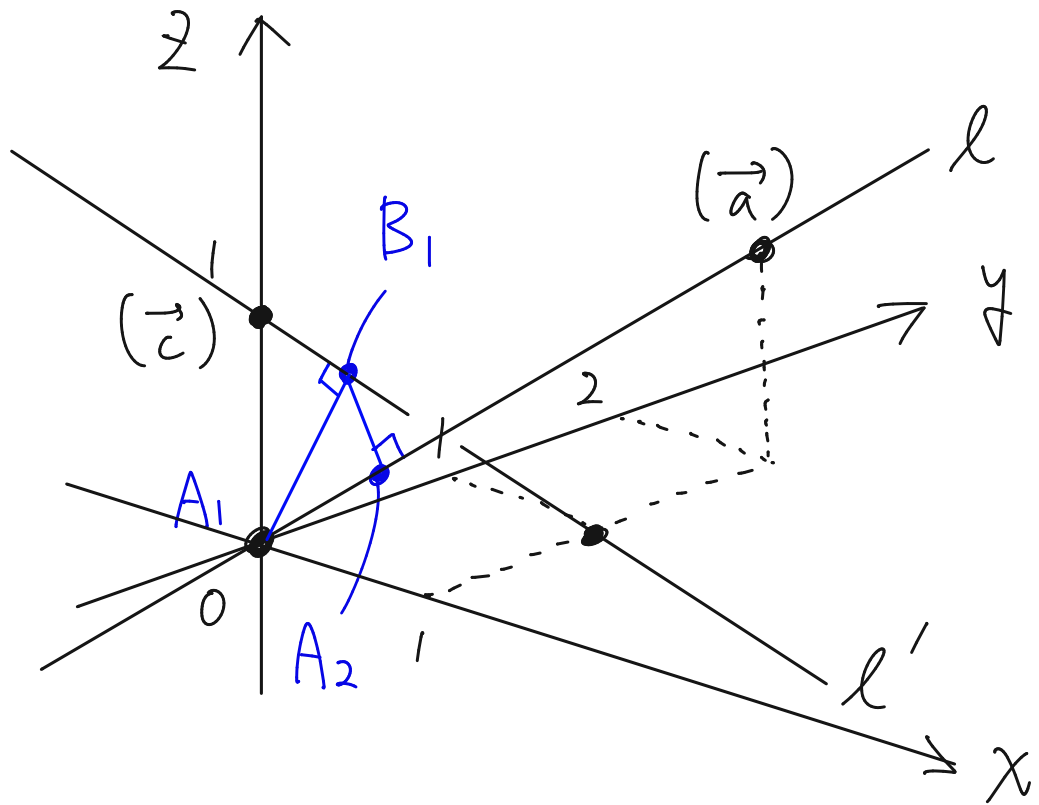
東北大学 2022 理系第5問

座標空間内において、ベクトル $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$, $\vec{c} = (0, 0, 1)$ が定める 2 直線 $l: s\vec{a}$, $l': t\vec{b} + \vec{c}$ (s, t は実数) を考える。点 A_1 を原点 $(0, 0, 0)$ とし、点 A_1 から直線 l' に下ろした垂線を A_1B_1 とおく。次に、点 $B_1(t_1\vec{b} + \vec{c})$ から直線 l に下ろした垂線を B_1A_2 とおく。同様に、点 $A_k(s_k\vec{a})$ から直線 l' に下ろした垂線を A_kB_k 、点 $B_k(t_k\vec{b} + \vec{c})$ から直線 l に下ろした垂線を B_kA_{k+1} とする手順を繰り返して、点 $A_n(s_n\vec{a})$, $B_n(t_n\vec{b} + \vec{c})$ (n は正の整数) を定める。

- s_n を用いて s_{n+1} を表せ。
- 極限值 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, $T = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ を求めよ。
- (2) で求めた S, T に対して、点 A, B をそれぞれ $A(S\vec{a})$, $B(T\vec{b} + \vec{c})$ とおくと、直線 AB は 2 直線 l, l' の両方と直交することを示せ。

複雑(ような)設定

→ 目で見てわかる形 (図・グラフ・表) に
可視化すると立式しやすい!



(1) どう立式するか？

$$\begin{array}{ccccc} A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & A_{n+1} \\ (S_n \vec{a}) & & (t_n \vec{a} + \vec{c}) & & (S_{n+1} \vec{a}) \end{array}$$

これを2"を立式して"は".

$$\left\{ \begin{array}{l} t_n \in S_n \text{ で表す} \\ S_{n+1} \in t_n \text{ "} \end{array} \right. \rightarrow S_{n+1} \in S_n \text{ で表せる}$$

↓
点の作り方を式にするだけ、でいいそう。

$$\# \#', \overrightarrow{A_n B_n} \perp l' \#').$$

$$\overrightarrow{A_n B_n} \cdot \underline{\overrightarrow{e}} = 0 \quad \rightarrow \text{成分もわかるが、}$$

$\underline{e}$ の方向ベクトル
 × ンド"い ので"ベ"クトル
 のまま処"理"!

$$\Leftrightarrow (\tau_n \vec{b} + \vec{c} - S_n \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、 $\leftarrow$ パーツは分けて計算.

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \\ |\vec{b}|^2 = 3 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = -1 \end{cases} \quad \text{よ')、①は}$$

$$3t_n - 1 - 2S_n = 0$$

$$\Leftrightarrow t_n = \frac{2S_n + 1}{3} \quad \dots (2) \quad \text{となる。}$$

次に、 $\overrightarrow{B_n A_{n+1}} \perp l$ より、

$$\overrightarrow{B_n A_{n+1}} \cdot \underline{\overrightarrow{a}} = 0$$

l の方向ベクトル

$$t_n \overrightarrow{u} + \overrightarrow{c}$$

$$\Leftrightarrow (S_{n+1} \overrightarrow{a} - t_n \overrightarrow{u} - \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a} = 0 \quad \dots (3)$$

ここで、 $\leftarrow$ パーツは分けて計算。

$$\begin{cases} |\overrightarrow{a}|^2 = 6 \\ \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = 1 \end{cases} \quad \text{より、(3)は}$$

($\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{a}$ はまだ求めた)

$$6S_{n+1} - 2t_n - 1 = 0$$

$$S_{n+1} = \frac{2t_n + 1}{6} \quad \dots (4) \quad \text{となる。}$$

②④より、

$$S_{n+1} = \frac{2 \cdot \frac{2S_n + 1}{3} + 1}{6}$$

$$= \frac{4S_n + 5}{18} \quad \text{と求められる。}$$

(2) 解ける漸化式で与えられた
数列の極限 $\rightarrow$ 解いて飛ばせはOK
(数学Ⅲ特講・極限⑤)

$$S_{n+1} = \frac{4S_n + 5}{18} \quad \rightarrow \text{二項間漸化式}$$

$$\alpha = \frac{4\alpha + 5}{18} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{14}$$

$$\Leftrightarrow S_{n+1} - \frac{5}{14} = \frac{2}{9} \left(S_n - \frac{5}{14} \right)$$

よって、
$$S_n - \frac{5}{14} = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \underbrace{\left(S_1 - \frac{5}{14}\right)}_{29-1 \text{ は } 0}$$

$$= -\frac{5}{14} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$$

$$S_n = \frac{5}{14} - \frac{5}{14} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$$

となるので、
$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \frac{5}{14}$$

と求められる。

λ_n についても、同様に $B_n \rightarrow A_{n+1} \rightarrow B_{n+1}$ から漸化式を作ってもOK (前回の初見動画) でももっとうまいにいくる! (関係式あり)

よって、②より $\lambda_n = \frac{2S_n + 1}{3}$ なので、

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2S_n + 1}{3}$$

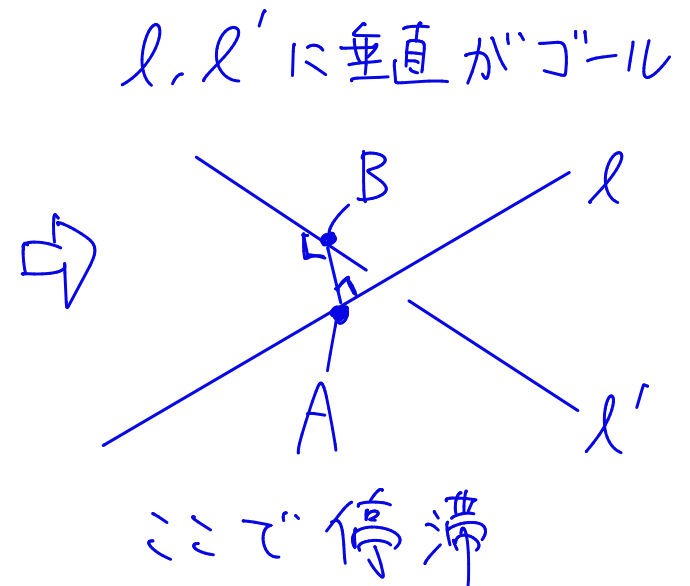
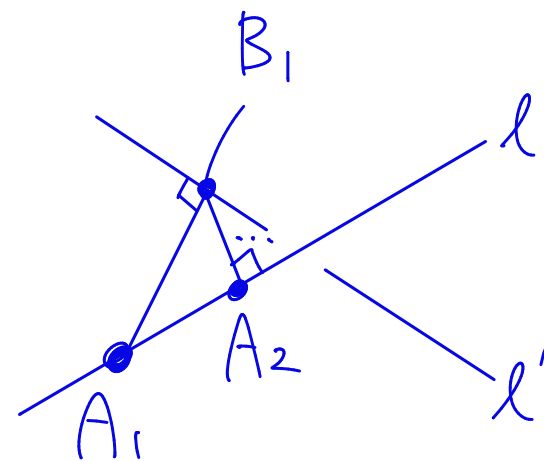
$$= \frac{2 \cdot \frac{5}{14} + 1}{3}$$

$$= \frac{4}{7}$$

と求められる。

収束する数列の和は分解してOK!

(3) イメージ



方向ベクトルわかっているので、内積計算にて
垂直条件確認めればOK!

$\vec{AB} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ より、

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{AB} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{b} = 0 \end{array} \right. \text{を示せば"必要十分"。}$$

$\vec{a}$ の方向ベクトル
 $\vec{b}$ の方向ベクトル

ゼロベクトルだと内積は0になる!

内積が0 $\Leftrightarrow$ 垂直

$$A \begin{pmatrix} \frac{5}{14} \\ \frac{5}{7} \\ \frac{5}{14} \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix} \text{ より、}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{14} \end{pmatrix} \text{ と求められるので、}$$

確かに

$$\vec{AB} \cdot \vec{a} = \frac{3}{14} - \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{b} = \frac{3}{14} - \frac{1}{7} - \frac{1}{14} = 0 \quad \text{となり、}$$

題意は示された。 