

名古屋大学 2023 理系第1問

実数係数の 4 次方程式 $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ は相異なる複素数 $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ を解に持ち、それらは全て複素数平面において、点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるとする。ただし、 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ はそれぞれ α, β と共役な複素数を表す。

- (1) $\alpha + \bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha}$ を示せ。
- (2) $t = \alpha + \bar{\alpha}, u = \beta + \bar{\beta}$ とおく。 p, q, r, s をそれぞれ t と u で表せ。
- (3) 座標平面において、点 (p, s) のとりうる範囲を図示せよ。

☆複素数平面

→ 式でいくのか、複素数平面上で
図形的で考えるのか。

→ 実数で？ そのまま変形？

→ $a+bi$? $r(\cos\theta + i\sin\theta)$?

常にいろんな方向の意識を持っておく！
数学Ⅳ特講の複素数平面も参考に。

初見での思考は前回動画で！

(1) 共役な複素数が解になっている
理由は？

α についての使える情報はこれのみ。

「点1を中心とする半径1の円周上」

← 4次方程式から考えても何も出てこない

円周上をどう表すか？

→ ゴールが α のままなので、
複素数のまま表そう。

α は、点1を中心とする半径1の
円周上にあるので、

$|\alpha - 1| = 1 \dots \textcircled{1} \rightarrow$ 絶対値は2乗して
を満たす。 キロンする。

$$\begin{aligned}\textcircled{1} &\Leftrightarrow |\alpha - 1|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1) = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha + \bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha}\end{aligned}$$

となるので、題意は示された。 

(2) $\begin{matrix} p, q, r, s \leftarrow \text{係数} \\ \alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta} \leftarrow \text{解} \end{matrix} \Bigg) \text{ の関係と } \text{いえは} \dots$

あと、(1)の誘導も意識!

題意より、

$$\begin{aligned} x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s \\ = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})(x - \beta)(x - \bar{\beta}) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表される。

右辺を変形すると $\leftarrow$ 解と係数の関係の導出

$$\begin{aligned} (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})(x - \beta)(x - \bar{\beta}) \\ = (x^2 - \underbrace{(\alpha + \bar{\alpha})}_t x + \underbrace{\alpha \bar{\alpha}}_u) (x^2 - \underbrace{(\beta + \bar{\beta})}_u x + \underbrace{\beta \bar{\beta}}_{\dots \textcircled{3}}) \end{aligned}$$

t と u にするのを急ぎに変形

であり、ここで(1)より

$$\alpha \bar{\alpha} = \alpha + \bar{\alpha}$$

また、同様にして

$$\beta \bar{\beta} = \beta + \bar{\beta} \quad \leftarrow \alpha \text{ と全く同じなので}$$

も示されるので、③は

$$\begin{aligned} (x^2 - tx + t)(x^2 - ux + u) \\ = \underline{x^4 - (t+u)x^3 + (t+tu+u)x^2 - 2tu x + tu} \end{aligned}$$

と表される。

よって、②の両辺の係数を比較すると、

$$\begin{cases} p = t + u \\ q = t + tu + u \\ r = 2tu \\ s = tu \end{cases} \quad \text{を得る。}$$

$$(3) \begin{cases} p = x + u \\ s = xu \end{cases}$$

$$(\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}) \rightarrow (x, u) \rightarrow (p, s)$$

まずはここから
調べる必要 ← このとりうる値
が必要!!

題意のもとで、

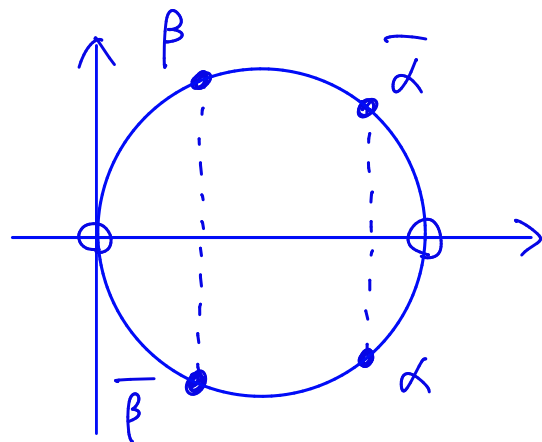
$\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ は 相異なる複素数

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq \beta \\ \alpha \neq \bar{\beta} \\ \alpha \neq 0, 2 \\ \beta \neq 0, 2 \end{cases}$$

である。



← これで必要+分
なのは大丈夫??



ここで、

$$\begin{cases} x = \alpha + \bar{\alpha} = 2 \operatorname{Re}(\alpha) \\ u = \beta + \bar{\beta} = 2 \operatorname{Re}(\beta) \end{cases} \quad \leftarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ に注目.}$$

で"あり", $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 2, 0 < \operatorname{Re}(\beta) < 2$ より

x, u のとりうる値の範囲は、

$$\underline{0 < x < 4, 0 < u < 4, x \neq u} \text{ となる。}$$

⊛ を全て考えること!

→ あとは (p, s) のとりうる値の範囲。

逆像法が考えやすい (良問 ⊛)

$$(x, u) \leftrightarrow (p, s)$$

ある (p, s) に対する (x, u) が
存在するための (p, s) の必要+分条件
を求めることで、 (p, s) のとりうる値の範囲を
求める!

よって、

$$\begin{cases} 0 < x < 4 \\ 0 < u < 4 \\ x \neq u \\ p = x + u \\ S = xu \end{cases}$$

を満たす (x, u) が
存在する ... (*)

ための (p, S) の必要十分条件を求めると、

「二次方程式 $x^2 - px + S = 0$ — $f(x)$ とおく

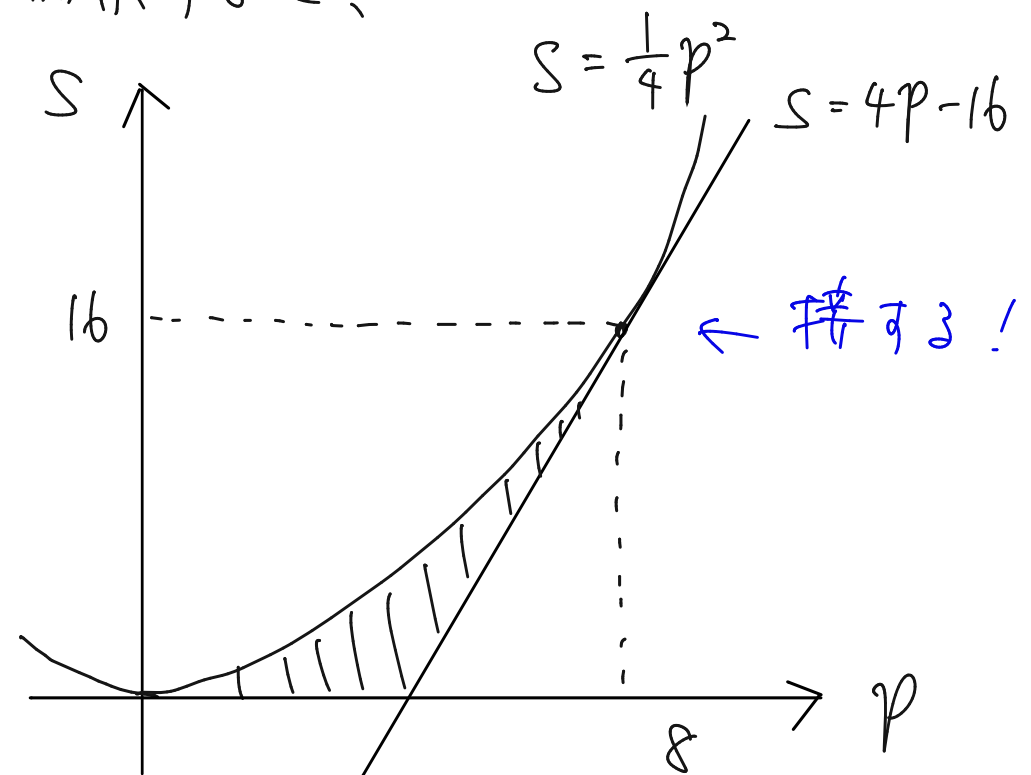
(*) $\Leftrightarrow$ が $0 < x < 4$ に異なる 2 実数解を
もつ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{軸: } 0 < \frac{p}{2} < 4 \\ D = p^2 - 4S > 0 \\ f(0) = S > 0 \\ f(4) = 16 - 4p + S > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < p < 8 \\ S < \frac{1}{4} p^2 \\ S > 0 \\ S > 4p - 16 \end{cases} \quad \text{となり、}$$

これが (p, S) のとりうる値の範囲である。

これを図示すると、



となる。ただし境界は全て含まない。//