複素数平面・図形への応用⑤　九州大学 2019 理系第5問

数学III特講

過去問

a, b を複素数、c を純虚数でない複素数とし、i を虚数単位とする。複素数平面において、点 z が虚軸全体を動くとき $w = \dfrac{az+b}{cz+1}$ で定める点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

(ア) $z = i$ のときに $w = i$ となり、$z = -i$ のときに $w = -i$ となる。

(イ) C は単位円の周に含まれる。

(ウ) 点 -1 は C に属さない。

このとき a, b, c の値を求めよ。さらに C を求め、複素数平面上に図示せよ。

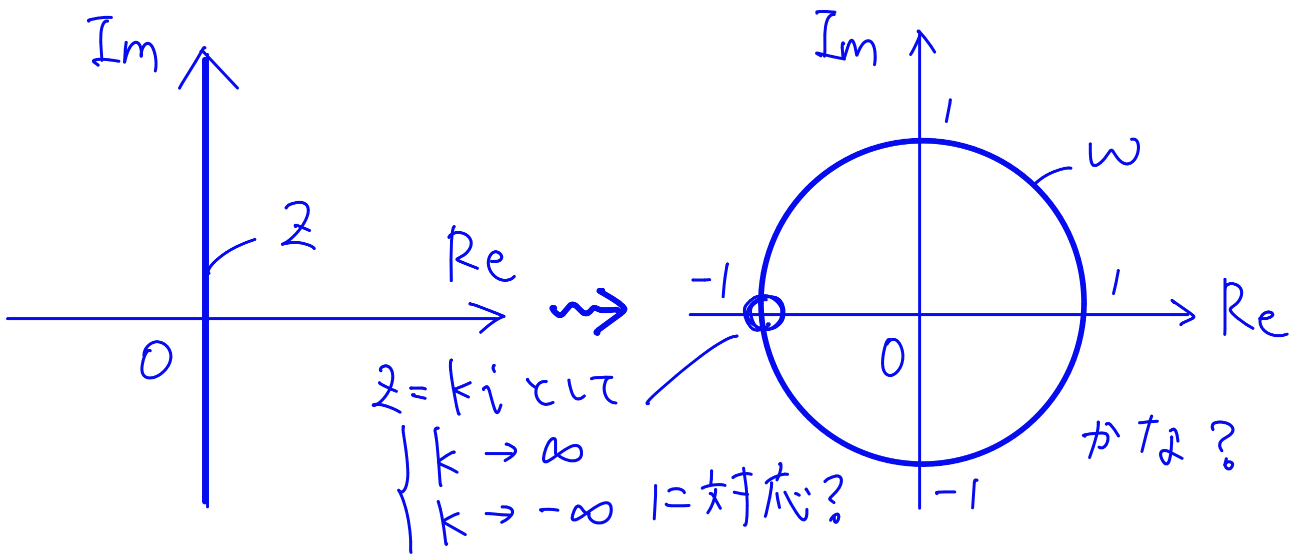
ポイント 複素数平面上の軌跡・一次分数変換

→ 良問演習③を復習!

〈頭の中のイメージ〉

zが虚軸上を動く(直線)ので、

wは($a-bc \neq 0$であれば)直線か円を描く。



解説 素朴に各条件(ア)~(ウ)を立式していく。

題意より cは純虚数ではない ---①

忘れそうなので書いておく。

(ア)より、

$$\begin{cases} i = \dfrac{ai+b}{ci+1} \\ -i = \dfrac{-ai+b}{-ci+1} \end{cases} \iff \begin{cases} -c+i = ai+b & \cdots② \\ -c-i = -ai+b & \cdots③ \end{cases}$$

これで必要十分

②+③より $b+c=0$ ...④

②−③より $2(a-1)i=0 \iff a=1$ ...⑤ を得る。

(②かつ③ ⟺ ②+③かつ②−③)

(ア) done

よって、④⑤より

$$w = \frac{z-c}{cz+1}$$

と表せる。

いま、zは虚軸上を動くので、$z=ki$
(kは実数)と表すことができる。

(イ)より、

$$\left|\frac{ki-c}{cki+1}\right| = 1 \quad \cdots ⑥$$ が任意の実数 k で成立。

↳ c も複素数なので、絶対値を直接求めるのが大変。

⑴ 複素数のまま
⑵ 実数の世界へ

ここではこれを紹介

もしくは必要条件（k に何か代入）で調べても OK.

⑴ 複素数のまま

$$⑥ \iff |ki-c| = |cki+1|$$

$(\because$ ①より $cki+1 \neq 0)$ ← why?

$$\iff |ki-c|^2 = |cki+1|^2$$

$$\iff (ki-c)(-ki-\bar{c}) = (cki+1)(-\bar{c}ki+1)$$

これで言い換え OK

$$\iff k^2 + \cancel{(c-\bar{c})ki} + |c|^2 = |c|^2k^2 + \cancel{(c-\bar{c})ki} + 1$$

$$\iff (|c|^2-1)k^2 - (|c|^2-1) = 0$$

これが任意の実数 k で成り立つための必要十分条件は $|c|^2 = 1 \quad \cdots ⑦$

(イ) done

⑵ 実数で

$c = \alpha + \beta i \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ とおくと、

$|ki-c|^2 = |cki+1|^2$ は

$$|-\alpha + (k-\beta)i|^2 = |(-\beta k+1) + \alpha k i|^2$$

計算できる!

$$\iff \alpha^2 + (k-\beta)^2 = (-\beta k+1)^2 + \alpha^2 k^2$$

$$\iff (\alpha^2+\beta^2-1)k^2 - (\alpha^2+\beta^2-1) = 0$$

これが任意の実数 k で成り立つための必要十分条件は $\alpha^2+\beta^2 = 1$ → 上と同じ

(ウ)より、

$$-1 = \frac{ki - c}{cki + 1} \quad \cdots ⑧$$

を満たす実数 k は存在しない。

これで言い換えOK

⑧ $\Leftrightarrow -cki - 1 = ki - c$

(∵ ①より $cki + 1 \neq 0$)

$\Leftrightarrow (c+1)ki = c - 1 \quad \cdots ⑨$

$c = -1$ のとき、$0 = -2$ となり、⑨を満たす実数 k は存在しない。→ OK.

$c \neq -1$ とすると、Ⓐより

$$k = \frac{c-1}{(c+1)i}$$

← 実数なのか？ c がわからないので

$k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow k = \bar{k}$ を使う！

ここで、

$$\bar{k} = \frac{\bar{c} - 1}{-(\bar{c}+1)i}$$

$\bar{c}$ を c に持っていけないか？

→ ⑦が使える。

$$= \frac{\frac{1}{c} - 1}{-\left(\frac{1}{c} + 1\right)i}$$

(∵ ⑦より $\bar{c} = \frac{1}{c}$)

$$= \frac{c-1}{(c+1)i} = k$$

となり、k は実数となるので不適。

以上より、$c = -1$ のみが適する。⑩

(ウ) done

まとめると、

① c は純虚数ではない ← 前提

④ $b + c = 0$ ← 条件(ア)

⑤ $a = 1$

⑦ $|c|^2 = 1$ ← 条件(イ)

⑩ $c = -1$ ← 条件(ウ)

↓

この5コで題意の言い換え完了。

以上①④⑤⑦⑩より、
$(a, b, c) = (1, 1, -1)$ を得る。

以後、z が虚軸上を動くときの　→ ki $(k \in \mathbb{R})$ と表せる。

$w = \dfrac{z+1}{-z+1}$ の軌跡を求める。

→ 良問③を参照。
逆像法で考える。

$$w = \frac{z+1}{-z+1}$$

$\Longleftrightarrow (-z+1)w = (z+1)$　$(\because z=1$ で不成立$)$

$\Longleftrightarrow (w+1)z = w-1$　← $w=-1$ で不成立

$\Longleftrightarrow z = \dfrac{w-1}{w+1}$ より、

$\dfrac{w-1}{w+1} = ki$ となる実数 k が存在する …☆

ための w の必要十分条件を求める。

☆ $\Longleftrightarrow \mathrm{Re}\left(\dfrac{w-1}{w+1}\right) = 0$

($w = d+ei$ $(d, e \in \mathbb{R})$ とするよりもラク)

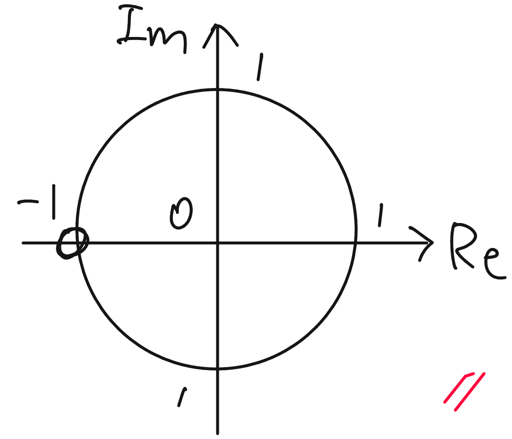
$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{w-1}{w+1} + \dfrac{\overline{w}-1}{\overline{w}+1}\right) = 0$

$\Longleftrightarrow \dfrac{w\overline{w}-1}{(w+1)(\overline{w}+1)} = 0$

$\Longleftrightarrow \dfrac{|w|^2-1}{|w+1|^2} = 0$

$\Longleftrightarrow |w| = 1$ かつ $|w+1| \neq 0$　軌跡の式

よって w の軌跡 C は、
原点中心の半径1の円
(点-1を除く)となる。

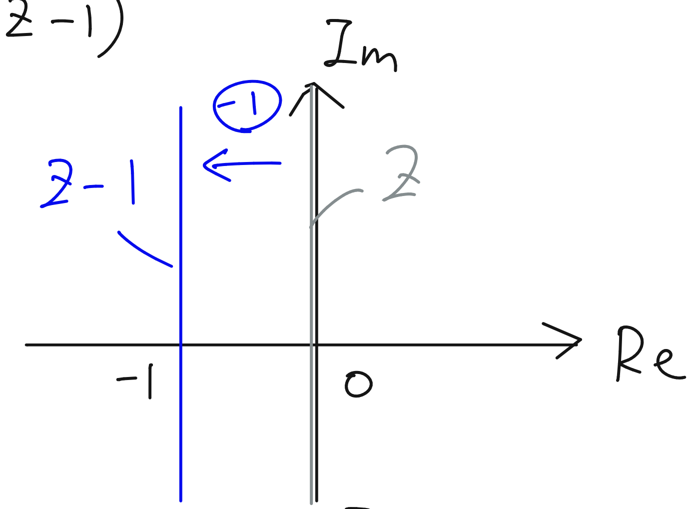


〈図形的なイメージ〉

$$w = \frac{z+1}{-z+1} = -1 + \frac{2}{-(z-1)}$$

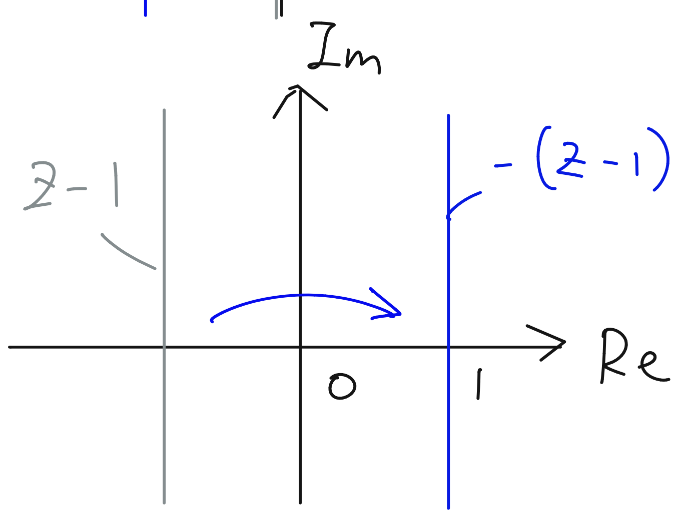
• $z \to z-1$

平行移動



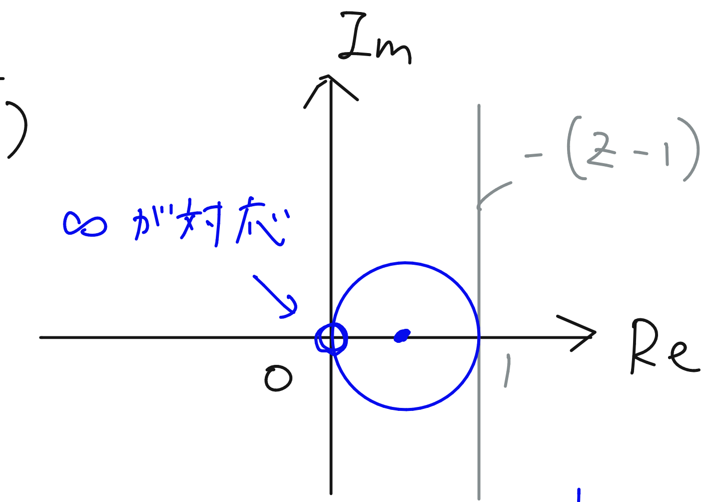
• $z-1 \to -(z-1)$

原点対称



• $-(z-1) \to \dfrac{1}{-(\bar{z}-1)}$

反転
(良問③を参照)



中心 $\frac{1}{2}$，半径 $\frac{1}{2}$ の円

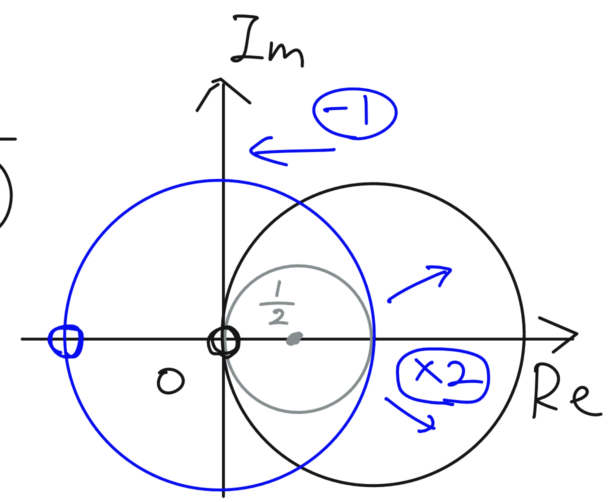
• $\dfrac{1}{-(\bar{z}-1)} \to \dfrac{1}{-(z-1)}$

(変わらず)

実軸対称

• $\dfrac{1}{-(z-1)} \to -1 + \dfrac{2}{-(z-1)}$

原点中心2倍拡大
+ 平行移動



確かに一致.