数学Ⅲ特講

良問演習

複素数平面・図形への応用①　基本的な移動

複素数平面上に点 $A(1)$, $B(2-\sqrt{3}i)$ をとる。

次の条件を満たす点 C が表す複素数をそれぞれ求めよ。

(1) 点 C と点 B が実軸対称

(2) 点 C と点 B が点 A に関して対称

(3) 三角形 ABC が正三角形となる

(4) 三角形 ABC が、斜辺が BC の直角二等辺三角形となる

ポイント 複素数平面上での様々な移動

複素数zに対する、移動後の点が表す複素数のまとめ。

- 実軸方向にa、虚軸方向にb移動
  $\longleftrightarrow$ $z+(a+bi)$
- 実軸対称 $\longleftrightarrow$ $\bar{z}$
- 虚軸対称 $\longleftrightarrow$ $-\bar{z}$
- 原点対称 $\longleftrightarrow$ $-z$
- 原点中心にk倍拡大
  $\longleftrightarrow$ kz $(k\in\mathbb{R})$
- 原点中心のθ回転移動
  $\longleftrightarrow$ $z(\cos\theta+i\sin\theta)$

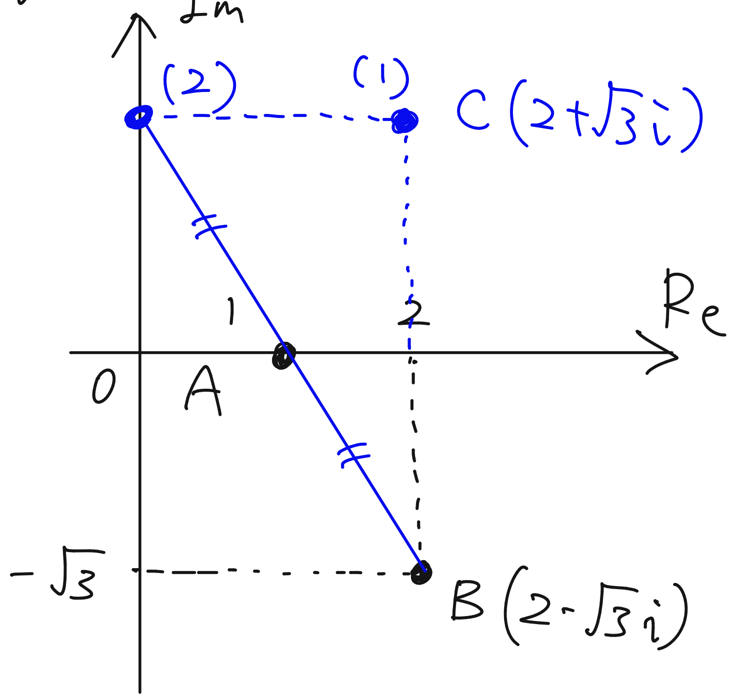
← 極形式が役立つ

※原点中心でなければ、原点まで平行移動

☆複素数平面とセットで理解を!

解説

$z_A=1$, $z_B=2-\sqrt{3}i$
とし、点Cが表す
複素数をz_Cとする。



(1) BとCが実軸
対称より、

$$z_C=\overline{z_B}=2+\sqrt{3}i$$

(2) ① 図形的に

BからAへは、実軸方向に-1、虚軸方向に$\sqrt{3}$移動しているので、Aから同じ分移動させて、$z_C=\sqrt{3}i$

② 中点公式

AがBCの中点となるので、

$$z_A = \frac{z_B + z_C}{2} \quad \leftarrow (*)$$

$$\Leftrightarrow z_C = 2z_A - z_B$$

$$= 2 - (2 - \sqrt{3}i) = \underline{\sqrt{3}i}$$

(*)については分点公式をおさえておく。

☆ A(α)、B(β)を結ぶ線分ABを

m:nに内分する点が表す数は $\dfrac{n\alpha + m\beta}{m+n}$

〃　外分　〃　$\dfrac{-n\alpha + m\beta}{m-n}$

(証明は、αとβを具体的において、複素数平面上で座標の公式から)

つまり、ベクトルと同様に考えられる。

→ これは、和・差・実数倍のみであることからも納得。(前セクション良問①)

☆ 派生して、中点を表す複素数は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

追加でC(γ)をおいて、△ABCが存在すれば

その重心を表す複素数は $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

③ 座標で

C(a, b)とおくと、A(1, 0)はB(2, $-\sqrt{3}$)Cの中点であることから

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{2+a}{2} \\ 0 = \dfrac{-\sqrt{3}+b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (a, b) = (0, \sqrt{3})$$

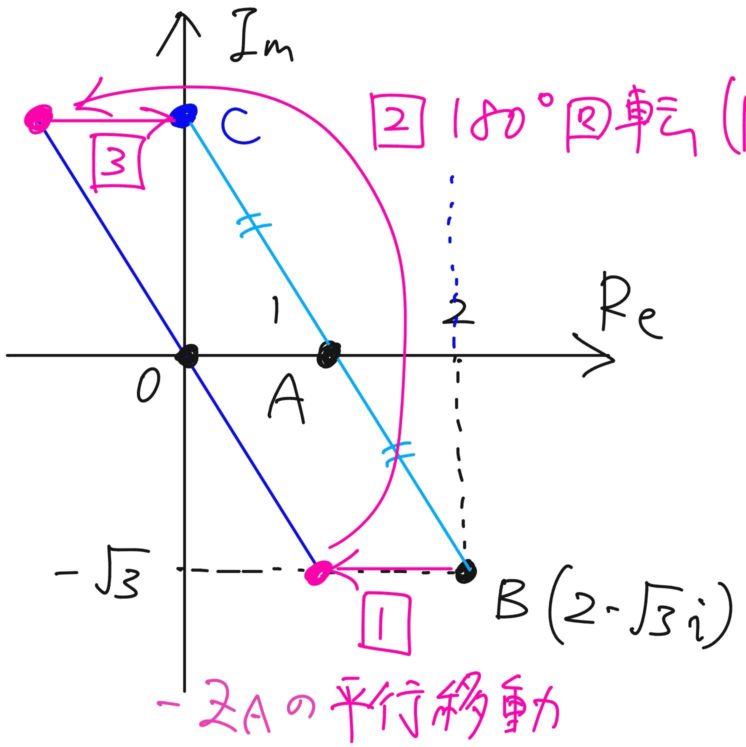
$$\rightarrow z_C = \underline{\sqrt{3}i}$$

④ 回転移動　← Bを、Aまわりに180°回転

$$z_C = \underbrace{(z_B - z_A)}_{\boxed{1}}\underbrace{(\cos\pi + i\sin\pi)}_{\boxed{2}} + \underbrace{z_A}_{\boxed{3}}$$

[1] Bを平行移動　[2] 180°回転 → 平行移動して戻す [3]

原点まわりの移動になった！



※ $\underbrace{z_C - z_A}_{\overrightarrow{AC}\text{に対応}} = \underbrace{(z_B - z_A)}_{\overrightarrow{AB}\text{に対応}}(\cos\theta + i\sin\theta)$ の書かれ方が多い。

$$= (1-\sqrt{3}i)\cdot(-1) + 1 = \sqrt{3}i$$

(3)

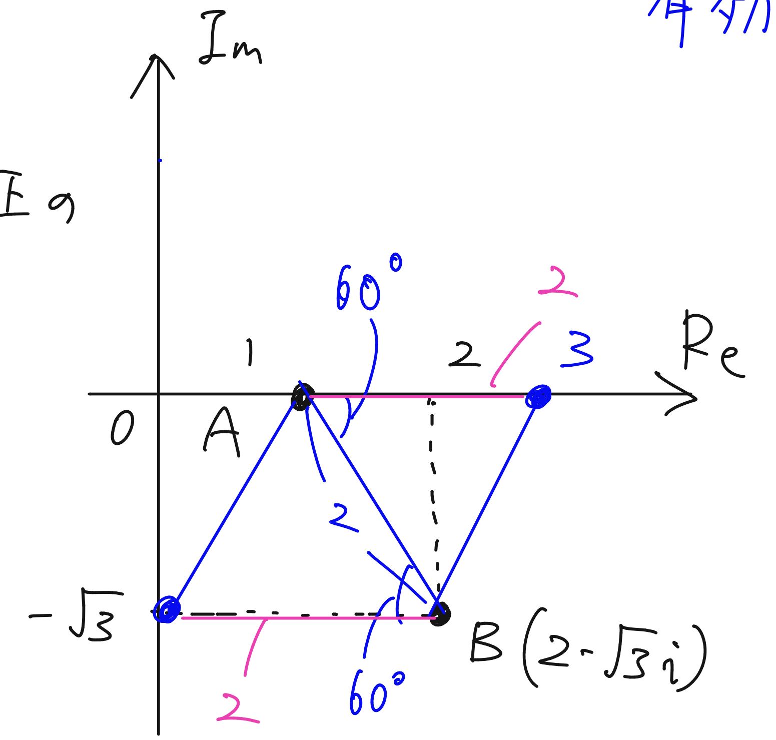
① 図形的に　← 今回は角度が考えやすいので有効

$AB = 2$,

線分ABと実軸正の向きとのなす角は60°なので、

右図から

$z_C = 3,\ -\sqrt{3}i$



② 回転移動

正三角形 ⇔ ある頂点を中心として、1つの頂点が60°（or −60°）回転して、残りの頂点と重なる。

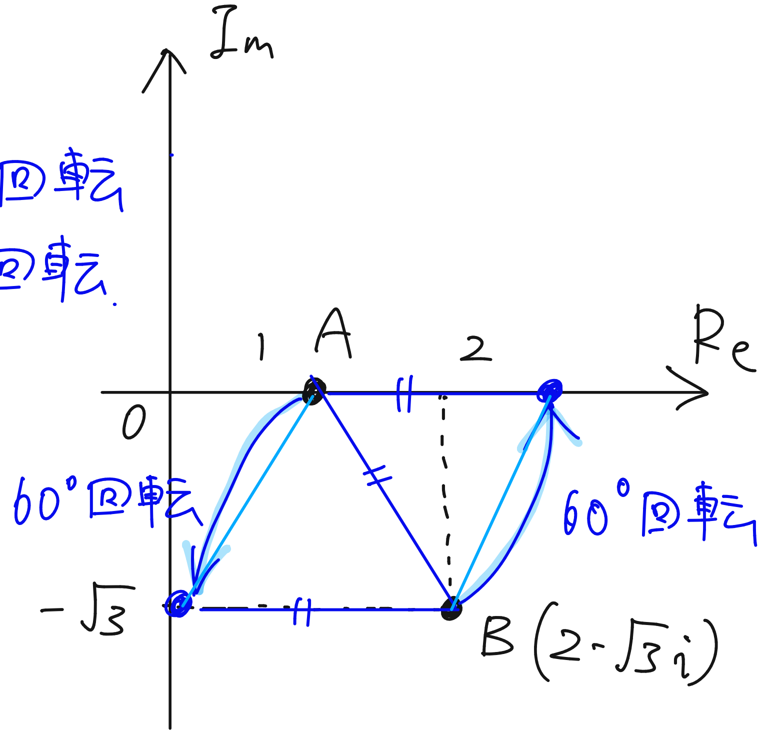
2通りある!

BをAまわりに60°回転

AをBまわりに60°回転

※これ以外はかぶってくる。

(BをAまわりに-60°回転でももちろんOK)



(i) BをAまわりに60°回転させる。

$$z_C = \underbrace{(z_B - z_A)}_{\text{Bを平行移動}} \underbrace{\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}_{60°\text{回転}} + \underbrace{z_A}_{\text{平行移動して戻す}}$$

Bを平行移動 → 60°回転 → 平行移動して戻す

原点まわりの移動になった!

☆平面上でもさっきと同じように確認を!

$= (1-\sqrt{3}i)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1$

$= \frac{1}{2}(1+3)+1$

$= \underline{3}$

(ii) AをBまわりに60°回転させる。

$$z_C = \underbrace{(z_A - z_B)}_{\text{Aを平行移動}} \underbrace{\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}_{60°\text{回転}} + \underbrace{z_B}_{\text{平行移動して戻す}}$$

Aを平行移動 → 60°回転 → 平行移動して戻す

$= (-1+\sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(2-\sqrt{3}i)$

$= \frac{1}{2}(-1-3)+(2-\sqrt{3}i)$

$= \underline{-\sqrt{3}i}$

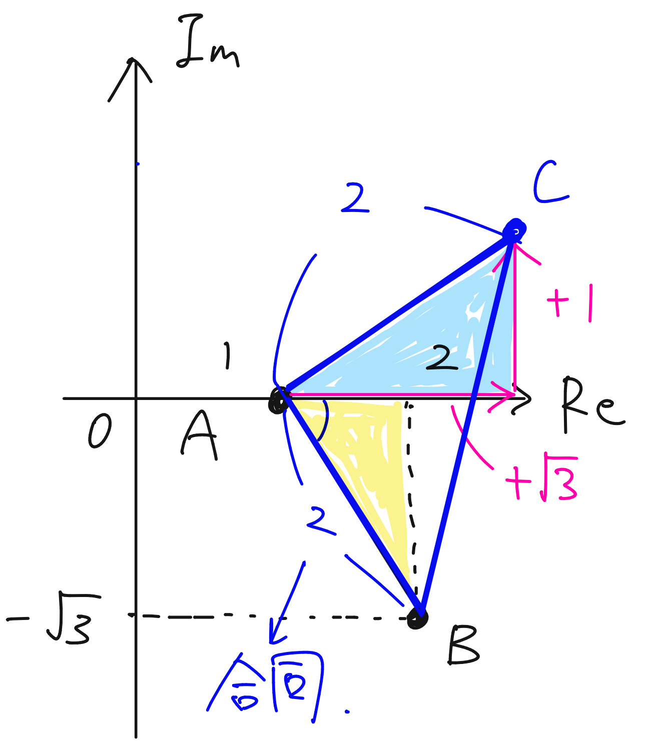
☆これからわかる通り、

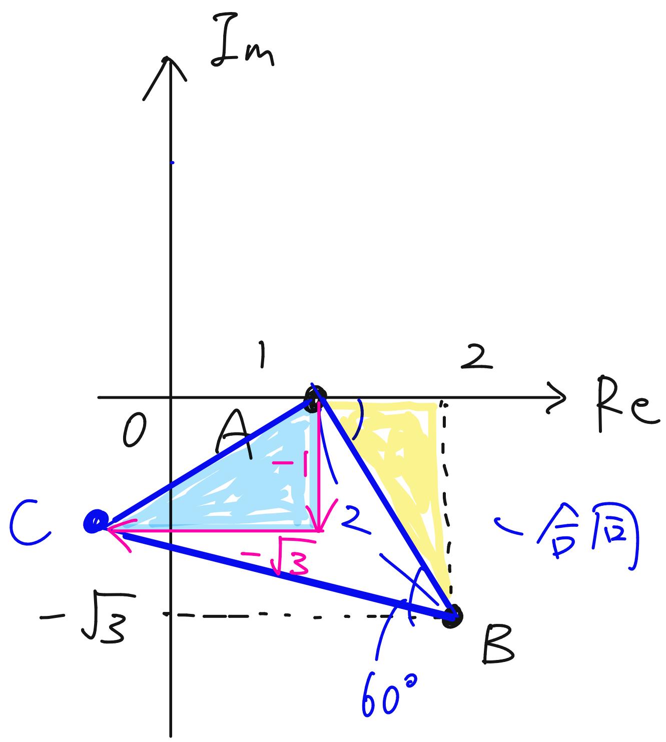
$\angle BAC = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ が成立。

角度を直接考えたいときは、この複素数求めればOK

(4)

① 図形的に　図より、$z_C = 1+\sqrt{3}+i,\ 1-\sqrt{3}-i$ //





② 回転移動（A中心）

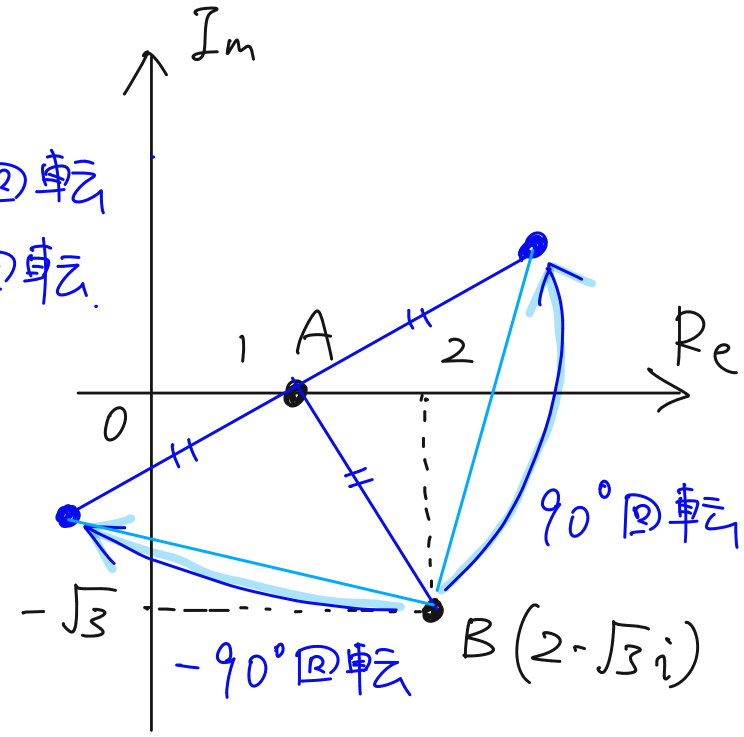
直角二等辺三角形

⇔ 直角の頂点を中心として、
1つの頂点が90°(or −90°)回転して、
残りの頂点と重なる。

2通りある！

BをAまわりに90°回転

〃　　−90°回転



(i) BをAまわりに90°回転させる。

$$z_C = \underbrace{(z_B - z_A)}_{\text{Bを平行移動}}\underbrace{\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}_{\to\ 90°\text{回転}} + \underbrace{z_A}_{\to\ \text{平行移動して戻す}}$$

$$= (1-\sqrt{3}i)\cdot i + 1$$

$$= 1+\sqrt{3}+i \quad //$$

(ii) BをAまわりに−90°回転させる.

$$z_C = \underline{(z_B - z_A)}\ \underline{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}\ \underline{+\ z_A}$$

Bを平行移動 → −90°回転 → 平行移動して戻す

$$= (1-\sqrt{3}i)\cdot(-i) + 1$$

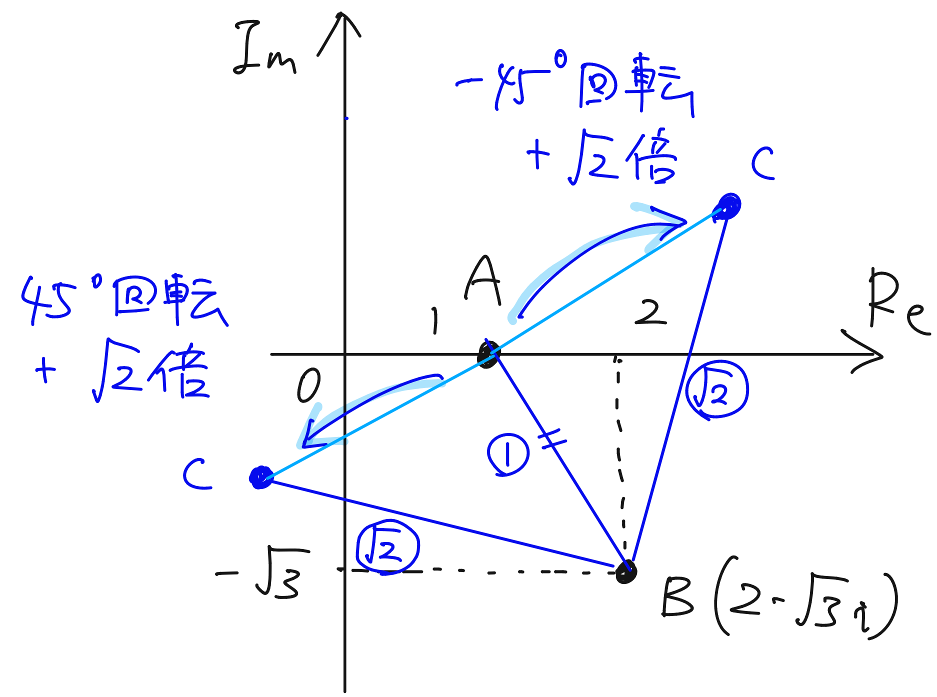
$$= 1-\sqrt{3}-i$$

※できた2つの z_C が表す点の中点はAになるはず.

$$\frac{(1+\sqrt{3}+i)+(1-\sqrt{3}-i)}{2} = 1$$ 確かに.

③ 回転移動(B中心)　(式のみ紹介)

Bを中心にして、Aを45°(−45°)回転させて $\sqrt{2}$ 倍に長さABを拡大



$$z_C = \underline{(z_A - z_B)} \times \underline{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\ \underline{+\ z_B}$$

Aを平行移動 → 45°回転 + $\sqrt{2}$ 倍拡大 → 平行移動して戻す

$$z_C = \underline{(z_A - z_B)} \times \underline{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}\ \underline{+\ z_B}$$

Aを平行移動 → −45°回転 + $\sqrt{2}$ 倍拡大 → 平行移動して戻す

で求まる.