東北大学 2023 文系第2問

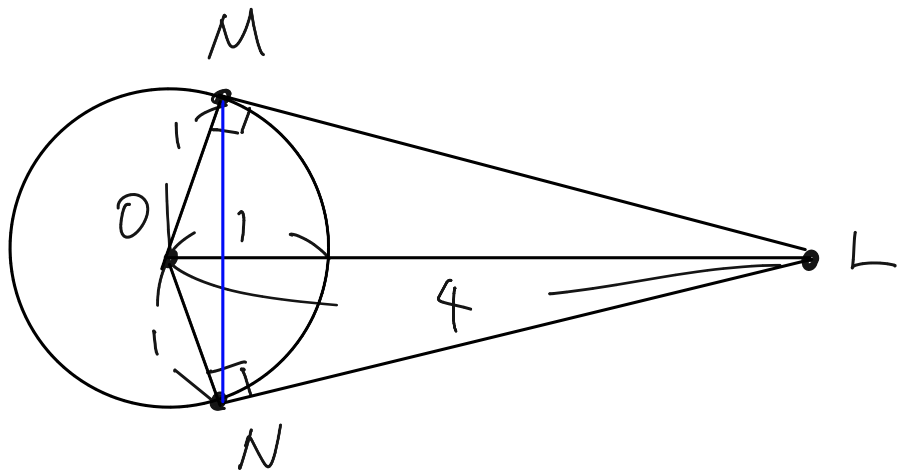
平面上の半径 1 の円 C の中心 O から距離 4 だけ離れた点 L をとる。点 L を通る円 C の 2 本の接線を考え、この 2 本の接線と円 C の接点をそれぞれ M, N とする。以下の問いに答えよ。

(1) 三角形 LMN の面積を求めよ。

(2) 三角形 LMN の内接円の半径 r と、三角形 LMN の外接円の半径 R をそれぞれ求めよ。

☆ 図が書けるときはまず書く！

☆ 図形的にいくか、座標に乗せるか、
(ベクトルか) → 今回は図形で十分！



上のように点をとって考えて一般性を失わない。 ← MとNの上下関係とか

△LMNの面積 → ∠MLNの情報考えて

$\frac{1}{2}\cdot ML\cdot NL\cdot \sin\angle MLN$

でもいいし、$\frac{1}{2}\cdot MN\cdot h$でも

ここでは幾何的に。←

MN⊥OLを言えたらラクにいけそう！

△OMLと△ONLについて、

$\angle OML = \angle ONL = 90^\circ$

$OL = OL$ (共通)　より

$OM = ON = 1$

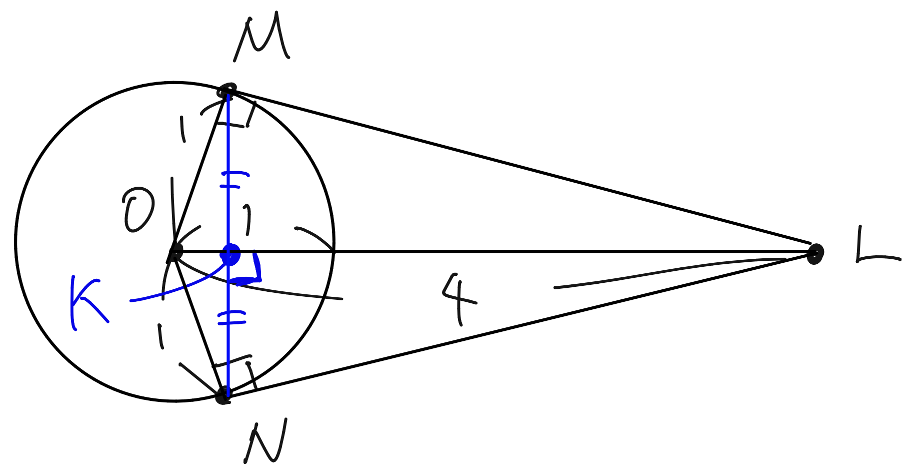
直角三角形の斜辺と他の1辺が等しいので

$\triangle OML \equiv \triangle ONL$ であり、M, Nは

OLに関して対称なので、$MN \perp OL$

であり、MNとOLの交点をKとすると

$MK = KL$ である。



△OMLで三平方の定理より

$ML = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$

よって△OMLの面積について

$\underset{OM}{\frac{1}{2} \times 1} \times \underset{ML}{\sqrt{15}} = \frac{1}{2} \times \underset{OL}{4} \times MK$

$\therefore MK = \frac{\sqrt{15}}{4}$ と求められる。

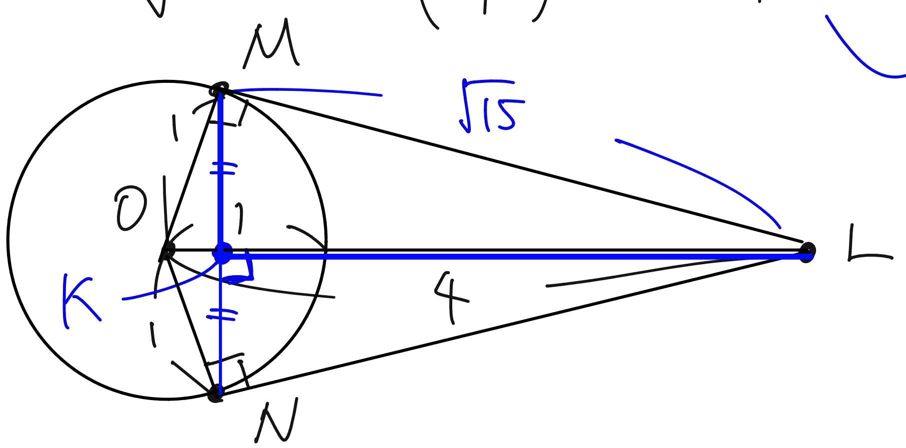
△MKLで三平方の定理より、

$KL = \sqrt{(\sqrt{15})^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \frac{15}{4}$

相似や三角比でもOK

↓

三角比なら2倍角でいける。



よって、

$\triangle LMN = \frac{1}{2} \times \underset{MN}{\frac{\sqrt{15}}{2}} \times \underset{KL}{\frac{15}{4}} = \frac{15}{16}\sqrt{15}$

である。

(2) 内接円の半径

→ 3辺と面積わかってるので あれ一択か、でも図形的な考察もできる！

外接円の半径

→ 正弦定理かと思うが、これも図形的に考えられるとラク！

内接円の半径について

〈考え方①〉

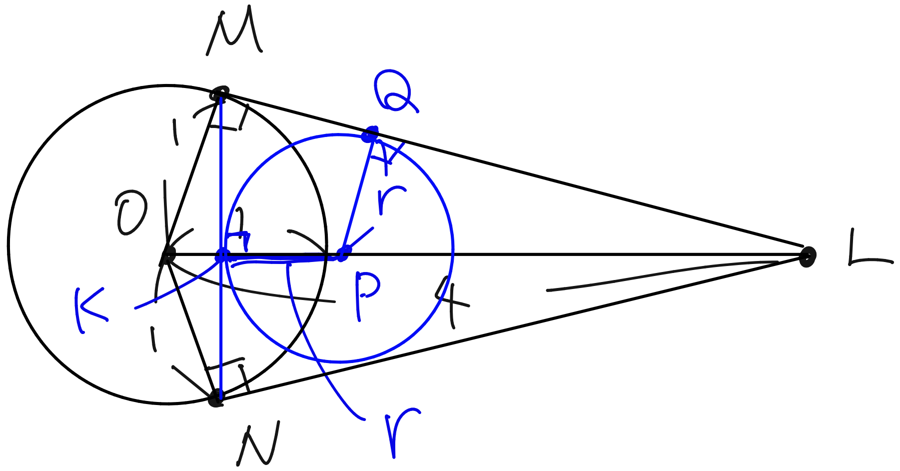
△LMNの面積について、

$\frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{15}}{2} + \sqrt{15} + \sqrt{15}\right) \times r = \frac{15}{16}\sqrt{15}$

$$\frac{5}{4}\sqrt{15}\,r = \frac{15}{16}\sqrt{15}$$

$$r = \frac{3}{4}$$ //

〈考え方②〉



内接円の中心をPとおくと、対称性より
PはOL上にあり、Kで接する。また、
図のようにQをとる(PQ⊥ML)。
△MKL ∽ △PQLより

$$MK : ML = PQ : PL$$

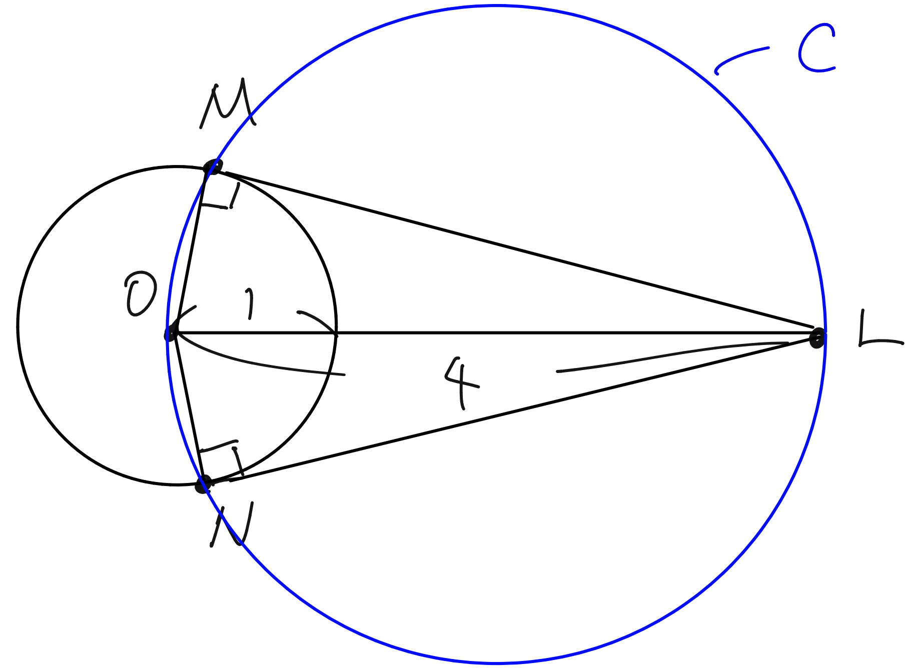
$$\underbrace{\frac{\sqrt{15}}{4} : \sqrt{15}}_{1:4} = r : \frac{15}{4} - r$$

$$\frac{15}{4} - r = 4r$$

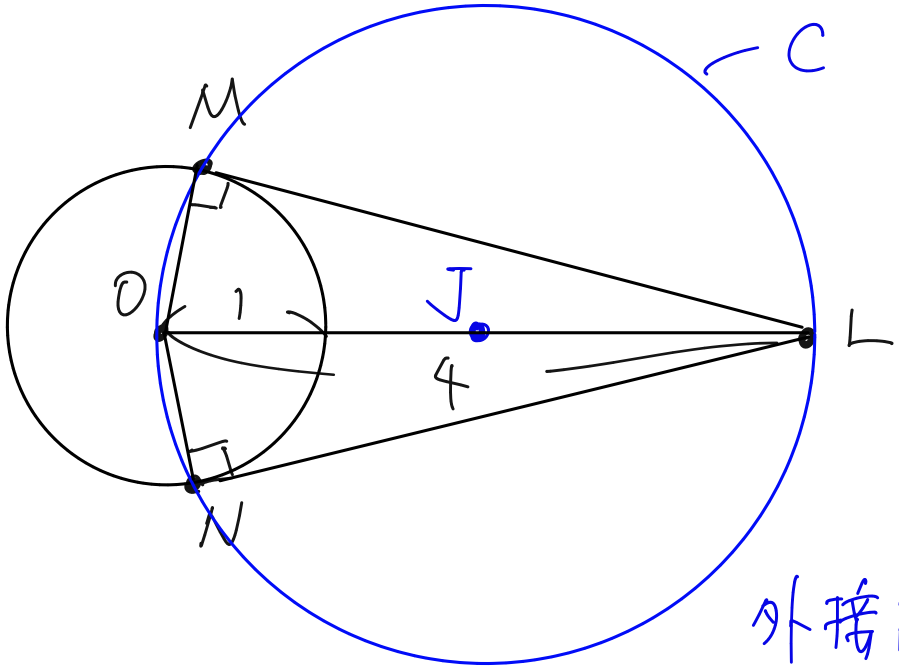
$$r = \frac{3}{4}$$ //

外接円の半径について

実はOも含めて外接円をとれる!!



OLを直径とする円をCとする。
このとき、$\angle OML = \angle ONL = 90^\circ$ より、
M, N も円C上に存在する。
よって、円Cは△LMNの外接円である。



外接円は1コのみ!

外接円の半径Rは、OLが円Cの直径であることを考えると、

$R = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ と求められる。

<別解> 正弦定理にしがみつく

3辺わかってる → 余弦定理でcos
→ sinを求める
→ 正弦定理!

△LMNで余弦定理より

$$\cos\angle MLN = \frac{15+15-\frac{15}{4}}{2\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}} = \frac{7}{8}$$

$0^\circ < \angle MLN < 180^\circ$ より

$$\sin\angle MLN = \sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

(2倍角とかでも…)

よって正弦定理より

$$2R = \frac{MN}{\sin\angle MLN} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{8}} = 4$$

$\therefore R = 2$