大阪大学 2017 文系第2問

実数 x, y, z が、$x+y+z=1$、$x+2y+3z=5$ を満たすとする。

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ。

(2) $z \geqq 0$ のとき、xyz が最大となる z の値を求めよ。

☆ 多変数関数の最大最小

→ 1変数で考えたい!! が基本

→ 1変数にできれば平方完成や微分でわかる.

$\begin{cases} \text{・文字消去} \leftarrow \text{関係式で消せるとき} \\ \text{・文字固定} \leftarrow \text{消せないとき} \end{cases}$

あとは媒介変数表示, 有名不等式も

(1) 2つの等式によって、1文字で全て表せる.

→ 文字消去でいける.

$$\begin{cases} x+y+z=1 & \cdots ① \\ x+2y+3z=5 & \cdots ② \end{cases}$$

①×2−② より, ← y を消す

$$x-z=-3$$
$$z=x+3 \quad \cdots ③$$

①×3−② より ← z を消す

$$2x+y=-2$$
$$y=-2x-2 \quad \cdots ④$$

これで必要十分

今回は y, z に範囲もなく、ラク.

→ $x^3+y^3+z^3-3xyz$ に代入して

3次関数で微分でもいいが,

見るからにアレ.

よって,

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=\underbrace{(x+y+z)}_{=1}(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$
$$=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \quad \leftarrow \text{2次になった!}$$
$$=x^2+(-2x-2)^2+(x+3)^2 -x(-2x-2)-(-2x-2)(x+3)-(x+3)x$$
$$=9x^2+21x+19$$

について、x が全ての実数をとるときの最小値を考えればよいので、

対応する y, z は必ずある

$$9x^2+21x+19 = 9\left(x+\frac{7}{6}\right)^2+\frac{27}{4}$$

つまり $x=-\frac{7}{6}$ のとき最小値 $\frac{27}{4}$ をとる。

(2) 誤り例

相加相乗平均より

$$\sqrt[3]{xyz} \leqq \frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{3}$$

よって $xyz \leqq \frac{1}{27}$ となるので

xyz の最大値は $\frac{1}{27}$.

→ 何がダメ？ まず符号、あとは、

等号成立条件は $x=y=z$ のとき

だが、そのとき

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=5 \end{cases}$$

を同時に満たす

(x, y, z) は存在しないので、

等号は不成立！

ということで同じように文字消去。

z の式にした方がちょびっとラクそう。

(x, y でも OK) → x, y を消す。

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=5 \end{cases}$$

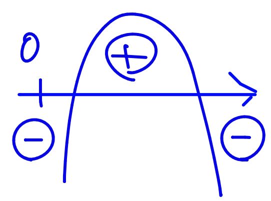
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=z-3 \\ y=-2z+4 \end{cases}$$

なので、

(1)と同じように。

xyz
$= (z-3)(-2z+4)z$
$= -2z^3 + 10z^2 - 12z$
これを $f(z)$ とおく。
$f(z)$ の $z \geqq 0$ での最小値をとる z の値を求める。 ← これがゴール！
3次なのでビ分！

$f'(z) = -6z^2 + 20z - 12$
$f'(z) = 0$ を解くと
$$z = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$$
なので、



$z \geqq 0$ での $f(z)$ の増減は

z	0	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
$f'(z)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(z)$	0	↘		↗		↘

→ あとは $f\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)$ と 0 との大小！
f' を 0 にする値なので、
$f(z)$ を $f'(z)$ で割った余りに代入するというワザが使える。

ここで、$f(z)$ を $f'(z)$ で割ると、

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & & \frac{1}{3} & -\frac{5}{9} \\ \cline{4-6}
-6 & 20 & -12 \big) & -2 & 10 & -12 \\
 & & & -2 & \frac{20}{3} & -4 \\ \cline{4-6}
 & & & & \frac{10}{3} & -8 & 0 \\
 & & & & \frac{10}{3} & -\frac{100}{9} & \frac{20}{3} \\ \cline{5-7}
 & & & & & \frac{28}{9} & -\frac{20}{3}
\end{array}$$

$$-2x^3+10x^2-12x=\left(\frac{1}{3}x-\frac{5}{9}\right)\left(-6x^2+20x-12\right)+\frac{28}{9}x-\frac{20}{3}$$

となるので、

$$f\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)=\frac{28}{9}\times\frac{5+\sqrt{7}}{3}-\frac{20}{3}$$

$$=\frac{28\sqrt{7}-40}{27}$$

$$=\frac{4}{27}\times\left(7\sqrt{7}-10\right)$$

ここで、$\sqrt{7}>2$ より、$7\sqrt{7}>14$ となるので、
この値は0より大きい。
よって $x\geqq 0$ で $f(x)$ が最大となるのは
$x=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$ のときである。//

〈別解〉

$f\left(\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}\right)$ の符号がわかればいいので、

$$f(x)=x\,y\,z$$

$$=(x-3)(-2x+4)x$$

という積の形に注目する！

$x=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$ のとき、 $x-3=\dfrac{\sqrt{7}-4}{3}<0$

$$-2x+4=\frac{2-2\sqrt{7}}{3}<0$$

なので、$f(x)=(x-3)(-2x+4)x$
について $x=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$ での値は正である。

(以下同様)