# 大阪大学 2022 理系第1問

$r$ を正の実数とする。複素数平面上で、点 $z$ が点 $\dfrac{3}{2}$ を中心とする半径 $r$ の円周上を動くとき、$z+w=zw$ を満たす点 $w$ が描く図形を求めよ。

☆ 一次分数変換

$$w = \frac{cz + d}{az + b} \quad (ad - bc \neq 0)$$

→ 円や直線を円や直線に移す.

→ 詳しくは概要欄の数学Ⅲ特講で.

題意より, $z$ は

$$\left| z - \frac{3}{2} \right| = r$$ を満たす.

ギロンできる形へ
必要十分に
言い換えた.

求める $w$ の条件は,

$$\begin{cases} \left| z - \frac{3}{2} \right| = r & \cdots ① \\ z + w = zw & \cdots ② \end{cases}$$

を満たす複素数 $z$ が

存在する …(＊) ための必要十分条件。

← 軌跡の鉄則. (必要十分条件)
逆像法で考えた.

アプリokkeで確認!

どう $z$ を消去する?

→ ② を変形して ① に代入.

② より $(w-1)z = w$

$w = 1$ は解でないので, $w \neq 1$ として

$$z = \frac{w}{w-1}$$

① に代入すると.

$$(＊) \iff \left| \frac{w}{w-1} - \frac{3}{2} \right| = r$$

必十条件

あとは図形が描ける形に変形.

$$\left|\frac{w}{w-1}-\frac{3}{2}\right|=r \quad \times|2(w-1)|$$

$$|2w-3(w-1)|=2r|w-1|$$

$$|w-3|=2r|w-1| \quad \cdots ③$$

☆ $\begin{cases} r=\frac{1}{2} \text{ なら垂直二等分線} \\ r\neq\frac{1}{2} \text{ ならアポロニウスの円.} \end{cases}$

→ ここで場合分けしてもOK（前回動画）

ここでは $w$ のままゴリゴリ進める.

$$③ \iff |w-3|^2=4r^2|w-1|^2 \quad \text{両辺2乗}$$

$$\iff (w-3)(\overline{w}-3)=4r^2(w-1)(\overline{w}-1)$$

$$\iff (4r^2-1)w\overline{w}-(4r^2-3)w-(4r^2-3)\overline{w}+4r^2-9=0 \quad \cdots ④$$

→ いわゆる円の形にもっていきたい.

が, $4r^2-1$ で割るときに場合分け

(i) $4r^2-1=0$. つまり $r=\frac{1}{2}$ のとき.

④は $2w+2\overline{w}-8=0$

$$\underline{\frac{w+\overline{w}}{2}}=2 \quad \text{実部.}$$

$$\mathrm{Re}(w)=2$$

よって $w$ は実部 $=2$ の直線を描く.

(ii) $r \neq \frac{1}{2}$ のとき、

$$④ \iff \left(w - \frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right)\left(\overline{w} - \frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right) = \left(\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right)^2 - (4r^2-9)$$

$$\iff \left|w - \frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right|^2 = \frac{16r^2}{(4r^2-1)^2}$$

よって $w$ は点 $\frac{4r^2-3}{4r^2-1}$ を中心とし、

半径 $\frac{4r}{|4r^2-1|}$ の円を描く。

☆ $4r^2-1<0$ もありえるので注意。

〈補足〉 図形的解釈

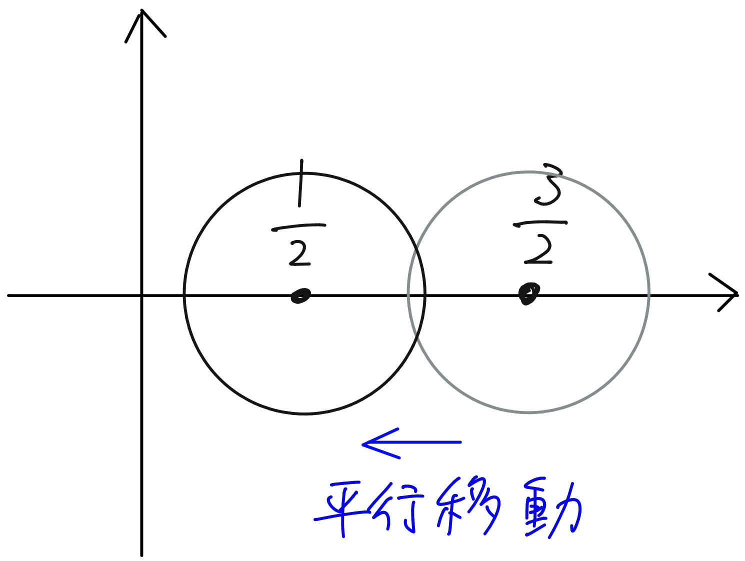
$z \neq 1$ として、

$$w = \frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1}$$

$$z \xrightarrow[\text{① 平行移動}]{} z-1 \xrightarrow[\text{② 反転}]{} \frac{1}{\overline{z-1}} \xrightarrow[\text{③ 実軸対称}]{} \frac{1}{z-1} \xrightarrow[\text{④ 平行移動}]{} 1+\frac{1}{z-1}$$

という変換

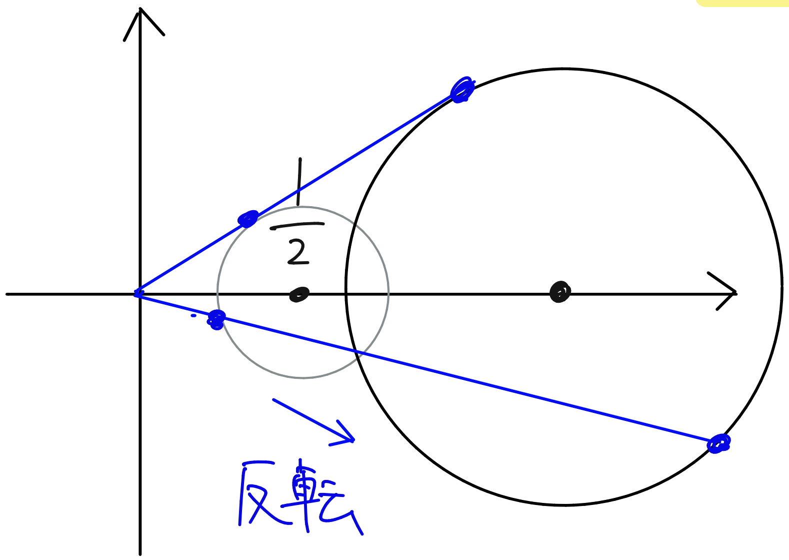
① $z \to z-1$




平行移動

② $z-1 \to \dfrac{1}{\bar{z}-1}$

(詳しくは数学III特講
複素数平面・
図形への応用③)




反転

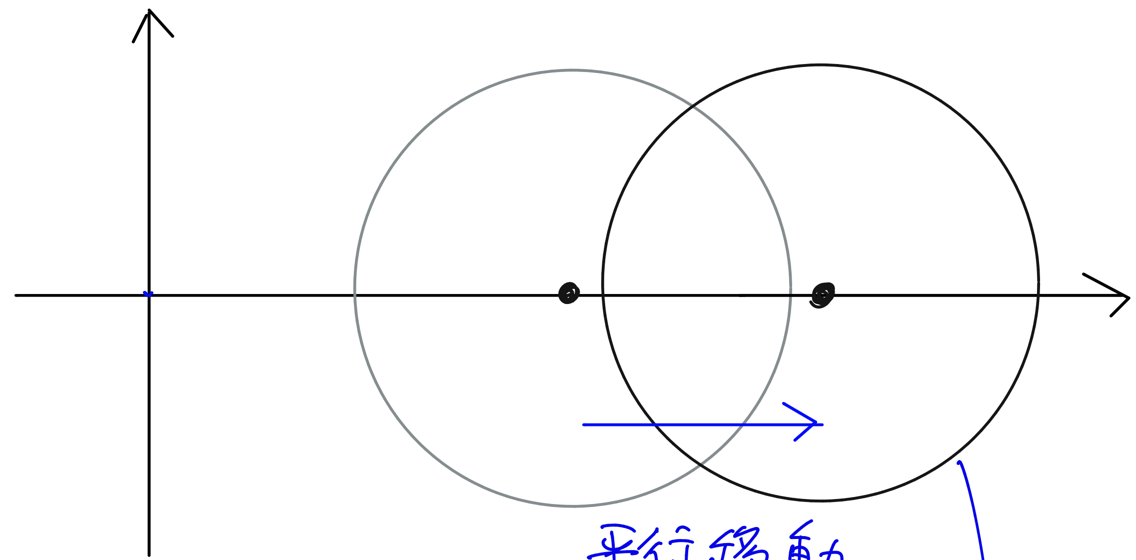
長さを
掛けて 1

※ $r \neq \frac{1}{2}$ のとき

③ $\dfrac{1}{\bar{z}-1} \to \dfrac{1}{z-1}$

実軸対称で不変

④ $\dfrac{1}{z-1} \to 1+\dfrac{1}{z-1}$



平行移動

これが $w$ の
描く図形.