

平面上の曲線④ 極座標・極方程式

- 極方程式 $r = \frac{1}{1 + 2 \cos \theta}$ が表す曲線の形を描け。
- 座標平面の原点を O とする。楕円 $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$ 上の点 A に対し、 $OA \perp OB$ となるように楕円上の点 B をとるとき、 $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ の値が一定になることを示せ。



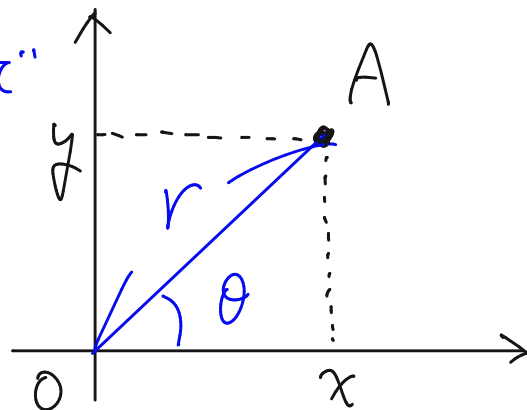
極座標

複素数・式の処理③

複素数平面での極形式と同様に、平面上での点Aを、 (x, y) ではなく、原点Oからの距離rと、x軸正の部分からの回転角 θ を使って表すことができる。

このとき (r, θ) をAの **極座標** といい、
Oを **極**、 θ を **偏角**、rを動径OAの長さまたは大きさという。

☆ 平面上の点は全てこれで表すことができるが、 θ は一意には定まらない



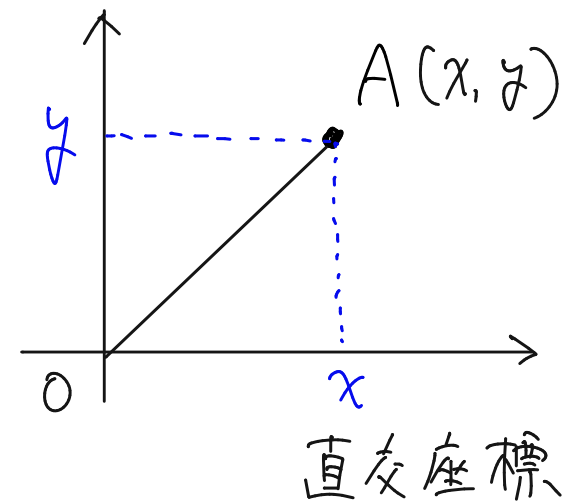
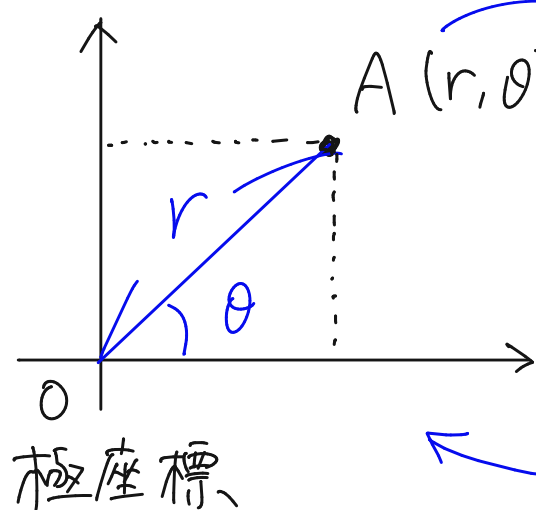
- θ には $+2n\pi$ 分の自由度がある
- 原点は $r=0$, θ は任意

極座標に対して、これまでの (x, y) で表された座標を直交座標という。

→ どう変換するか？

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

で (x, y) を決定



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \\ \cos \theta = \frac{x}{r} \end{cases}$$

で (r, θ) を決定

← $r \neq 0$ のとき

☆ この変換式はすぐ使えるように！

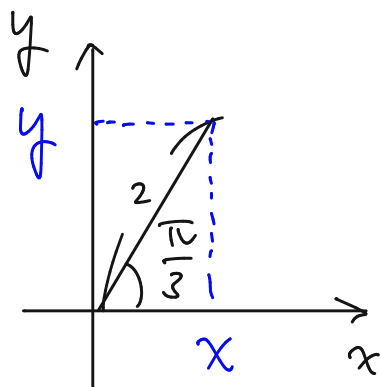
例

• 極座標 $(2, \frac{\pi}{3})$

→ 直交座標 (x, y) は?

$$x = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1$$

$$y = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \therefore \underline{(1, \sqrt{3})}$$



• 直交座標 $(1, 1)$

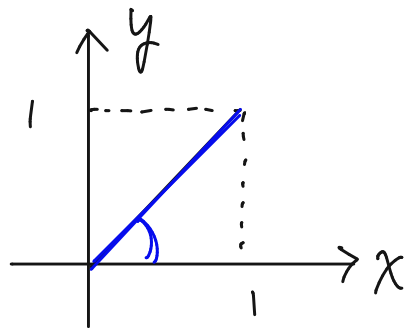
→ 極座標 (r, θ) は?

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

を満たす θ は $0 \leq \theta < 2\pi$
で考えると $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \underline{(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})}$$



極方程式

平面上の曲線が 極座標 (r, θ) を用いて

$$r = f(\theta) \quad \text{又は} \quad F(r, \theta) = 0 \quad \text{で}$$

表されるとき、これをその曲線の **極方程式** と言う。

☆ 図示と直交座標への変換が大事。

直接分かるときは OK

$$\underline{r^2, r \cos \theta, r \sin \theta}$$

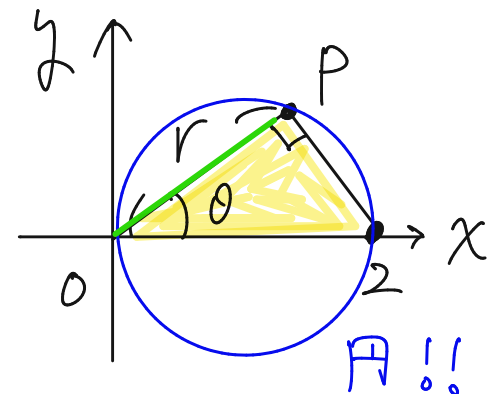
を作り出す!!

→ x, y に変換できる。

• 図で分かるとき

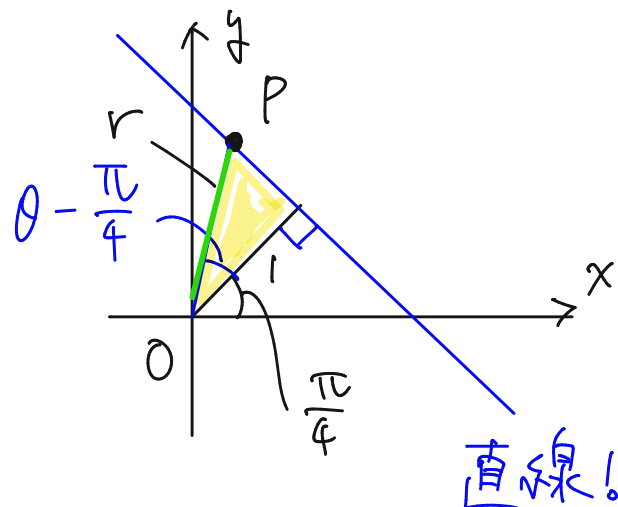
$$r = 2 \cos \theta$$

→ 両辺 r をかけて
 (x, y) にしてもいいが...



$$r \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

→ 加法定理で"
 $r \cos \theta, r \sin \theta$ を
 作ってもいいが..."



解説

(1) $r = \frac{1}{1 + 2 \cos \theta}$ → すぐには図形的に
 考えにくい.

$\Leftrightarrow r(1 + 2 \cos \theta) = 1$
 why?

$\Leftrightarrow r = 1 - 2r \cos \theta \leftarrow r \in r^2$ にしたい
 ので分けて2乗

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = (1 - 2r \cos \theta)^2 \rightarrow 1 - 4r \cos \theta \\ 1 - 2r \cos \theta \geq 0 \end{cases} + 4r^2 \cos^2 \theta$

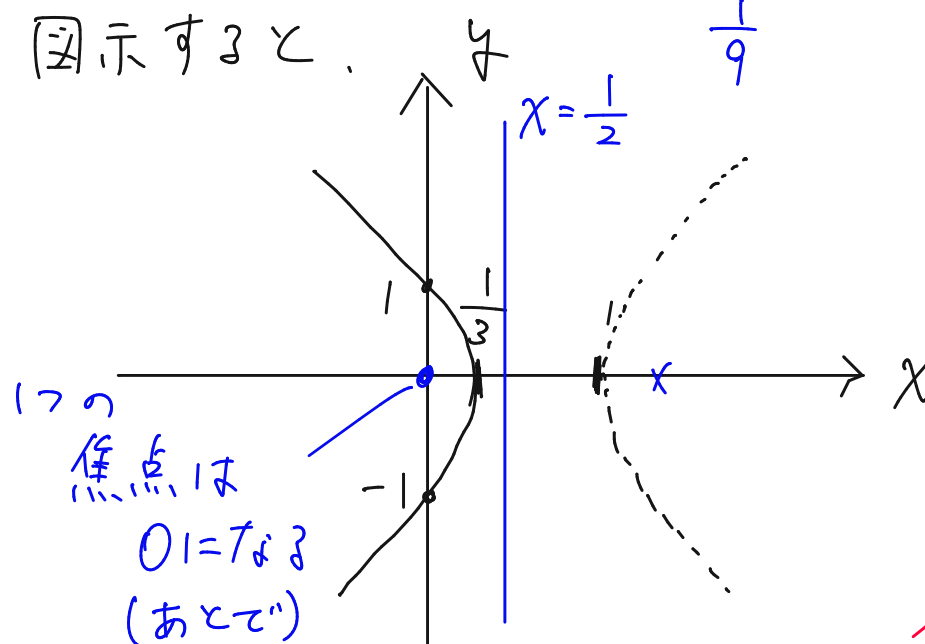
ここで 直交座標に変換 すると,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - 4x + 4x^2 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 - y^2 = \frac{1}{3} \rightarrow \text{双曲線!} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\frac{\left(x - \frac{2}{3} \right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

図示すると.



☆ $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ ところでチェック!

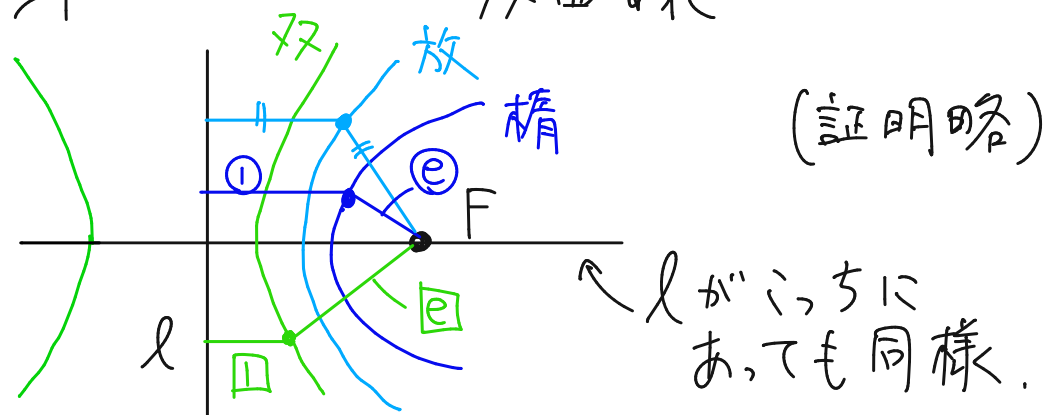
補足

実は、 $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$ (★) ($e > 0, d > 0$)

は e の値によって 色々な 二次曲線を表す。

□ まず、ある定点 F をとり、 F を通らない定直線 l を考えて、 F と l からの距離の比が $e:1$ であるような点 P の軌跡を考えると、

$\left\{ \begin{array}{ll} 0 < e < 1 & \text{のとき 楕円} \\ e = 1 & \text{" 放物線} \\ e > 1 & \text{" 双曲線} \end{array} \right.$ を表す。



この e を 離心率 という。

また、この F は 楕円や双曲線の1つの焦点となる。

□ 実は ★ は、 $F \in (0,0)$, $l \in x = d (>0)$ としたときの、□の軌跡を表していることを示す。

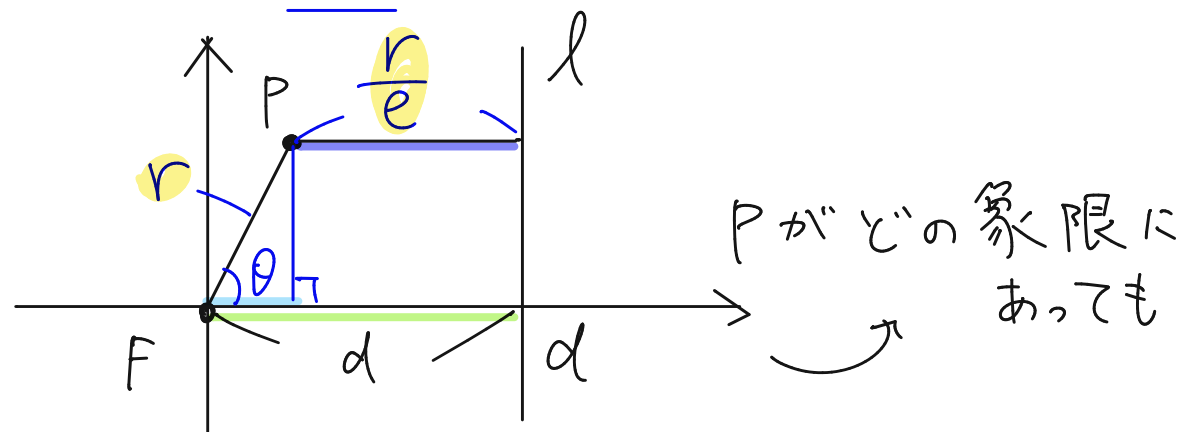
$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

$$\Leftrightarrow ed = r(1 + e \cos \theta) \quad (\because ed \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow d = r \cos \theta + \frac{r}{e}$$

→ 座標平面でどういう軌跡を描くか。

$$d = r \cos \theta + \frac{r}{e}$$



よって確かに F と l からの距離の比が $e:1$ であるような点の軌跡を表す!

※ $r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$ はどういう図形?

これは、 $r = \frac{ed}{1 + e \cos(\pi + \theta)}$ と変形

で“き”るので、 $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$ と 原点对称 π 回転の図形で、やっぱり二次曲線。(r 不変)

(2) 楕円上の点と角度の問題

→ 媒介変数表示でおかないように
注意!! (詳しくは前々回の良問②)
→ 極座標が役に立つ.

点 A を

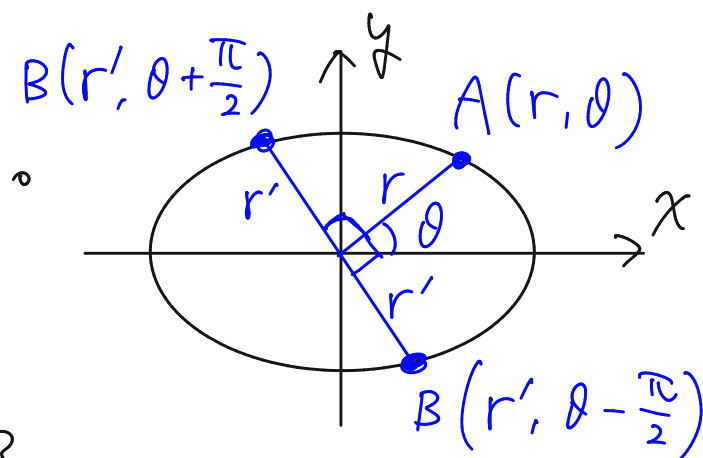
極座標 (r, θ) とおく。

このとき点 B は

$(r', \theta + \frac{\pi}{2})$ 又は

$(r', \theta - \frac{\pi}{2})$ とおける。

↳ r としないように注意.



点 A, B とともに楕円上にあるので、

$$\begin{cases} \frac{r^2 \cos^2 \theta}{p^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{q^2} = 1 \quad \dots \textcircled{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{r'^2 \cos^2(\theta \pm \frac{\pi}{2})}{p^2} + \frac{r'^2 \sin^2(\theta \pm \frac{\pi}{2})}{q^2} = 1 \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \frac{r'^2 \cos^2 \theta}{p^2} + \frac{r'^2 \sin^2 \theta}{q^2} = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。

このとき、 $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ について、

→ 原点からの距離
も極座標と
相性 good

$$\begin{aligned} & \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \\ &= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\cos^2 \theta}{p^2} + \frac{\sin^2 \theta}{q^2} \right)}_{\textcircled{1} \text{より}} + \underbrace{\left(\frac{\sin^2 \theta}{p^2} + \frac{\cos^2 \theta}{q^2} \right)}_{\textcircled{2} \text{より}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \quad \text{となり、確かに点A, Bの}$$

位置によらず"値は一定となる。 ▣