東北大学 2017 理系第6問

$a,\ b,\ c$ を実数とし、

$$I(a,\ b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx dx,\ \ J(a,\ b,\ c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx \sin cx dx$$

とおく。ただし、$a\neq 0$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $I(a,\ b)$ を求めよ。

(2) $J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ。

(3) 次の極限を求めよ。$\displaystyle\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx dx$

☆ 指数関数 × 三角関数 の積分
→ 2回部分積分で同形出現！別の方法も.

(1) $I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx$

$$=\left[\underline{\frac{1}{a}}e^{ax}\cos bx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{ax}\cdot b(-\sin bx)dx$$

$b=0$ の可能性があるので、
指数関数を積分すべし！

$$=\frac{1}{a}e^{\frac{a\pi}{2}}\cos\frac{b\pi}{2}-\frac{1}{a}+\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$=\frac{1}{a}e^{\frac{a\pi}{2}}\cos\frac{b\pi}{2}-\frac{1}{a}+\frac{b}{a}\left(\left[\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{ax}\cdot b\cos bx\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{a}e^{\frac{a\pi}{2}}\cos\frac{b\pi}{2}-\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}e^{\frac{a\pi}{2}}\sin\frac{b\pi}{2}-\frac{b^2}{a^2}\underline{I(a,b)}$$

戻った！

よって

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I(a,b)=\frac{1}{a}e^{\frac{a\pi}{2}}\cos\frac{b\pi}{2}+\frac{b}{a^2}e^{\frac{a\pi}{2}}\sin\frac{b\pi}{2}-\frac{1}{a}$$

$$\underline{I(a,b)=\frac{1}{a^2+b^2}\left(e^{\frac{a\pi}{2}}\left(a\cos\frac{b\pi}{2}+b\sin\frac{b\pi}{2}\right)-a\right)}$$

となる。

※ $a=1,\ b=0$ などで妥当性チェック！
※ $a, b\in\mathbb{N}$ じゃないので注意!!

＜別解＞ 微分形を組み合わせて不定積分求める。

$$(e^{ax}\cos bx)' = a\underline{e^{ax}\cos bx} - b e^{ax}\sin bx \quad \cdots①$$

$$(e^{ax}\sin bx)' = a e^{ax}\sin bx + b\underline{e^{ax}\cos bx} \quad \cdots②$$

↓

①×a + ②×b で残せる。

↓

$$(\underline{a e^{ax}\cos bx + b e^{ax}\sin bx})' = (a^2+b^2)e^{ax}\cos bx$$

→ 不定積分わかった！

$$\therefore I(a,b) = \frac{1}{a^2+b^2}\Big[a e^{ax}\cos bx + b a^{ax}\sin bx\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

→ 同じ結論

(2) $$J(a,b,c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\underline{\sin bx \sin cx}\,dx$$

↓ 積和で cos になる。

→ (1) の I の形が出る！

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{e^{ax}}\cdot\frac{1}{2}\left(\underline{\cos(b-c)x} - \underline{\cos(b+c)x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}I(a,b-c) - \frac{1}{2}I(a,b+c)$$

(3) いきなり極限の話…

(1)(2)をどう使うか？

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\underline{\sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx}\,dx$$

積和でまとめていけそうな…

どう組み合わせればうまくいくか。

$$\begin{cases} \sin tx \cos 4tx \to \sin 5tx \text{ と } \sin(-3tx) \\ \sin 2tx \cos 3tx \to \sin 5tx \text{ と } \sin(-tx) \end{cases}$$

→ $J(1,5t,5t)$, $J(1,5t,-t)$,
$J(1,-3t,5t)$, $J(1,-3t,-t)$ が出てくる

→ $I(1,10t)$, $I(1,0)$, $I(1,4t)$, $I(1,6t)$,
$I(1,2t)$, $I(1,-8t)$, $I(1,-4t)$, $I(1,-2t)$

→ (1)で求めているのでなんとかなりそう.
あとは極限.

$\begin{cases} \sin tx \cos 3tx \\ \sin 2tx \cos 4tx \end{cases}$ でやっても、同じようになる.

→ 腹をくくる.

$$8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx = K(t)$$

とおくと、

$$K(t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \left(\sin 5tx + \sin(-3tx)\right)\left(\sin 5tx + \sin(-t)\right) dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin 5tx - \sin 3tx)(\sin 5tx - \sin tx)\, dx$$

$$= 2\Big(J(1,5t,5t) - J(1,3t,5t) - J(1,5t,t) + J(1,3t,t)\Big)$$

$$= I(1,0) - I(1,10t) - I(1,-2t) + I(1,8t) - I(1,4t) + I(1,6t) + I(1,2t) - I(1,4t)$$

→ 少しでもラクしたい…

ここで、$I(a,b)$の定義より、

$I(a,b) = I(a,-b)$ なので、 $\cos bx = \cos(-bx)$

$$K(t) = I(1,0) - 2I(1,4t) + I(1,6t) + I(1,8t) - I(1,10t)$$

→ 計算するのだるいので、
定性的に $t \to \infty$ を考える

aは全て1なので、それで考えればOK.

$$I(1,b)=\frac{1}{1+b^2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{b\pi}{2}+b\sin\frac{b\pi}{2}\right)-1\right)$$

→ bを∞にとばすとどうなる？

$1+b^2$が強いので勝つ.

<u>直接は考えにくいので評価して</u>

<u>はさんではさみうち！</u>

ここで、ある実数αを用いて

$$\cos\frac{b\pi}{2}+b\sin\frac{b\pi}{2}=\sqrt{1+b^2}\sin\left(\frac{b\pi}{2}+\alpha\right)$$

と表せるので、

甘くてOK!!

$$-\sqrt{1+b^2}\leqq\cos\frac{b\pi}{2}+b\sin\frac{b\pi}{2}\leqq\sqrt{1+b^2}$$

を得る。よって

$$\frac{-e^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+b^2}-1}{1+b^2}\leqq I(1,b)\leqq\frac{e^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+b^2}-1}{1+b^2}$$

となり、

$$\frac{-e^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+b^2}-1}{1+b^2}\xrightarrow[b\to\infty]{}0$$

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+b^2}-1}{1+b^2}\xrightarrow[b\to\infty]{}0$$ なので、

はさみうちの原理より $\underline{I(1,b)\xrightarrow[b\to\infty]{}0}$ である。

よって、

$$\lim_{t\to\infty}K(t)=\underline{I(1,0)}$$

$I(1,4t)$とか
$I(1,6t)$とか
全て0にいく！

↑
収束先!!

$$=\underline{e^{\frac{\pi}{2}}-1}$$ となる。

↑
$I(1,b)$で$b=0$とする.