九州大学 2021 理系第2問

θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ をみたす定数とし、x の 2 次方程式

$$x^2 - (4\cos\theta)\,x + \frac{1}{\tan\theta} = 0 \quad \cdots\cdots (*)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $(*)$ が実数解をもたないような θ の値の範囲を求めよ。

(2) θ が (1) で求めた範囲にあるとし、$(*)$ の 2 つの虚数解を α, β とする。ただし、α の虚部は β の虚部より大きいとする。複素数平面上の 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $O(0)$ を通る円の中心を $C(\gamma)$ とするとき、θ を用いて γ を表せ。

(3) 点 O, A, C を (2) のように定めるとき、三角形 OAC が直角三角形になるような θ に対する $\tan\theta$ の値を求めよ。

$$x^2-(4\cos\theta)x+\frac{1}{\tan\theta}=0 \quad \cdots (*)$$

(1) (*)の判別式をDとすると、

(*)が実数解を持たない必要十分条件は、$D<0$ である。

D/4

$D<0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\theta-\frac{1}{\tan\theta}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\theta(4\sin\theta\cos\theta-1)}{\sin\theta}<0 \quad \cdots ①$$

☆積や商の形に持っていき、問題を小さくする。

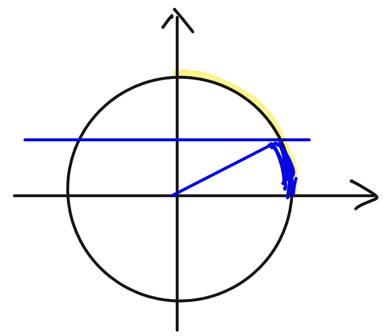
ここで $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より $\cos\theta>0$, $\sin\theta>0$

ゆえ、① $\Leftrightarrow 4\sin\theta\cos\theta-1<0$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta<\frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

☆1つにまとめる

$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より、



② $\Leftrightarrow 0<2\theta<\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 0<\theta<\dfrac{\pi}{12}$

☆$\theta=\dfrac{\pi}{12}$ のとき重解を持つことを確認してもいいケド、めんどくさいのでパス。

(2) 二次方程式の虚数解の配置

→ 数学III特講・
複素数平面/図形への応用② を参照、

複素数平面の問題
- 図形の活用☆
- 式で
  - 実数でギロン
  - 複素数のまま

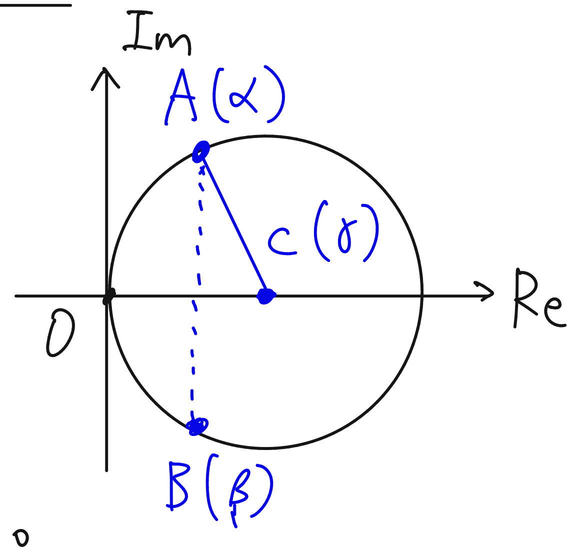
(*)は実数係数より α, β は共役

複素数平面で実軸対称

→ 図形的な考察とも相性よい

考え方① 実数の世界で考える

(*)は実数係数より、
αとβは共役なので、
AとBは実軸対称となる。
よって円も実軸対称と
なり、Cは実軸上に存在。



よってある実数kを用いて、$\gamma = k$ と表せる。

→ 1つ式を立てれば終る.
　($\gamma = a + bi$ とおくより楽)

→ 円であることをどう立式するか.

→ 半径が等しい. $OC = AC$

→ αを求める必要あり.

ここで、(*)を解くと、

$$x = 2\cos\theta \pm \sqrt{\underbrace{4\cos^2\theta - \frac{1}{\tan\theta}}_{<0}}$$

$$= 2\cos\theta \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{\tan\theta} - 4\cos^2\theta}\ i}_{\in\mathbb{R}}$$

※ $a>0$ のとき $-a$ の平方根は $\sqrt{a}i, -\sqrt{a}i$ で、$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ と定めるので、
解の公式は $D<0$ でも成立する。
($\sqrt{\text{虚数}}$ のケースは + のみとなる)

よって、$\alpha = \underbrace{2\cos\theta}_{Re(\alpha)} + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{\tan\theta} - 4\cos^2\theta}}_{Im(\alpha)}\ i$

ここで $OC = AC$ を考えると、

$$|k| = \sqrt{(2\cos\theta - k)^2 + \left(\frac{1}{\tan\theta} - 4\cos^2\theta\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 = (2\cos\theta - k)^2 + \left(\frac{1}{\tan\theta} - 4\cos^2\theta\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4k\cos\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

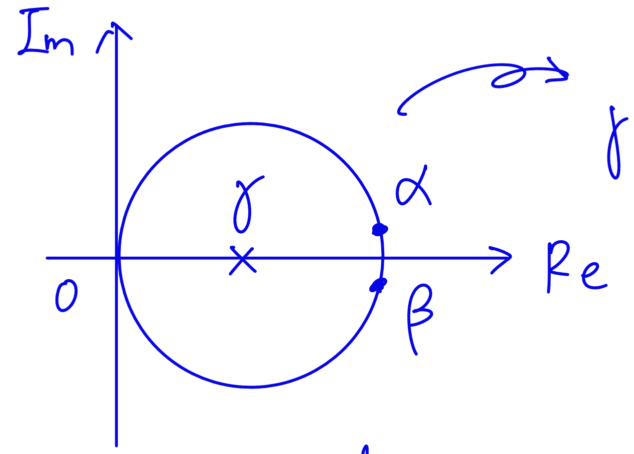
$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{4\sin\theta} \quad (\because \cos\theta \neq 0)$$

よって $\gamma = \dfrac{1}{4\sin\theta}$ を得る。

☆ BCは自動的にOC, ACと等しくなるのでこれで必要十分. why?

答えチェック → 極端な例を考える.

$\theta \to \dfrac{\pi}{12}$ とするとどういう状況か.



$\gamma \to \dfrac{Re(\alpha)}{2}$ となるはず.

つまり, $\dfrac{1}{4\sin\frac{\pi}{12}} = \cos\dfrac{\pi}{12}$ となるはず.

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \leftarrow \text{OK}$$

考え方② 複素数のまま

解かずに解と係数の関係を活用!

(前略) $\beta = \bar{\alpha}$, $\gamma = k \ (k \in \mathbb{R})$ とおける。

このとき

$OC = AC$

$\iff |k| = |k-\alpha|$

$\iff |k|^2 = |k-\alpha|^2 \rightarrow (k-\alpha)(k-\overline{\alpha})$

$\iff 0 = -k(\alpha+\overline{\alpha}) + \alpha\overline{\alpha} \quad \cdots ②$

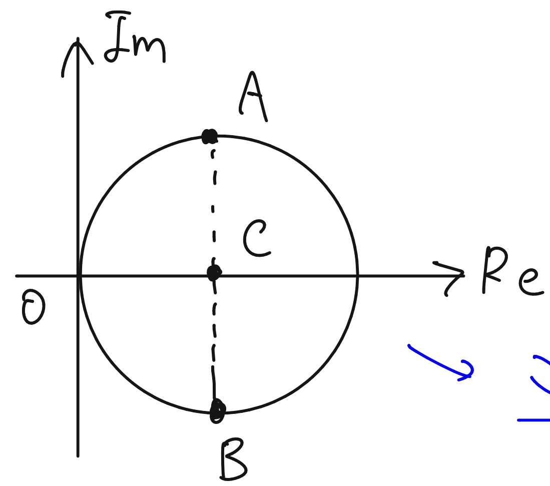
ここで (＊) の解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \overline{\alpha} = 4\cos\theta \\ \alpha\overline{\alpha} = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$ なので

② より $k = \dfrac{\alpha\overline{\alpha}}{\alpha+\overline{\alpha}} = \cdots$ (同じ)

(3) 直角三角形になるのはどんなとき？
まずは図形的な考察から．

∠O や ∠A が 90° となることはないので，
∠C が 90° となる場合を考えればよい。



OC = AC より
納得できる．

この状況をどう立式する？

考え方 ① ← (2) の ① に対応

△OAC は OC = AC の直角二等辺三角形

$\iff \mathrm{Re}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha)$ ← これで立式完了

$\iff 2\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1}{\tan\theta} - 4\cos^2\theta}$

$\iff 4\cos^2\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} - 4\cos^2\theta \quad (\because \cos\theta > 0)$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$\cos^2\theta$ を $\tan\theta$ にそろえた。

$$\Leftrightarrow 8\tan\theta = 1+\tan^2\theta \quad (\because \tan\theta \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\theta - 8\tan\theta + 1 = 0 \quad \cdots ③$$

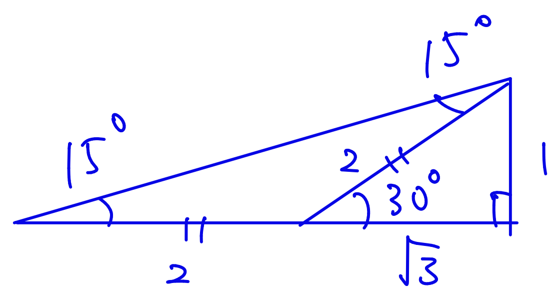
③ を $\tan\theta$ について解くと $\tan\theta = 4\pm\sqrt{15}$

このうち $0<\theta<\frac{\pi}{12}$ を満たすものを考える。

θ は求まらないので $\tan$ で比較

$\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ であり、

∵



$\rightarrow \tan 15^\circ = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

$= 2-\sqrt{3}$

加法定理でも OK.

$4-\sqrt{15} = \frac{1}{4+\sqrt{15}} < \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ かつ

※ $4-\sqrt{15} \gtreqless 2-\sqrt{3}$ で移項して考えても OK（前回の初見動画参照）

$4+\sqrt{15} > 2-\sqrt{3}$ なので、

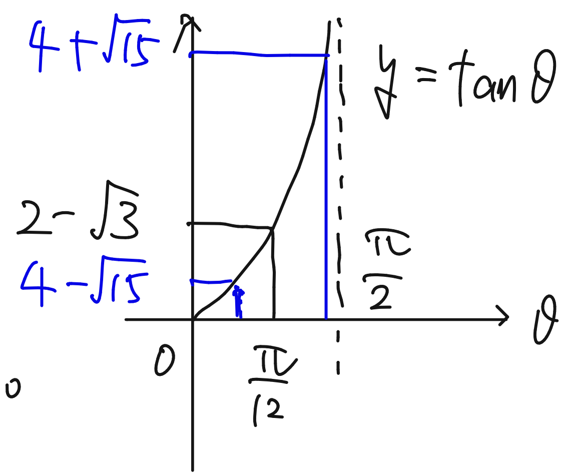
$0 < 4-\sqrt{15} < \tan\frac{\pi}{12} < 4+\sqrt{15}$ が成立。

$\tan\theta$ の $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ での単調増加性より、

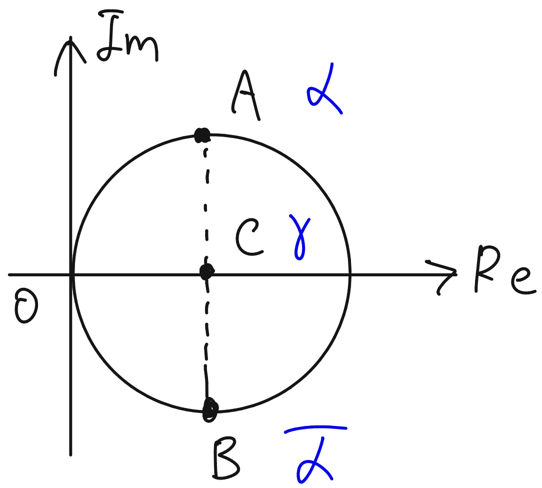
$0<\theta<\frac{\pi}{12}$ での

③ の $\tan\theta$ の解は

$\tan\theta = 4-\sqrt{15}$ となる。



考え方② ← (2)の②に対応



α, γ のまま立式するには?

$\triangle OAC$ は $OC = AC$ の直角二等辺三角形

$\Leftrightarrow \gamma = \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}$ ← C が AB の中点となる.
→ $\angle OCA = 90^\circ$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4\sin\theta} = 2\cos\theta$ ← 解と係数の関係

→ $\tan\theta$ に持っていく!
$\cos\theta$ を作りたい

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{16(1-\cos^2\theta)} = 4\cos^2\theta$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+\tan^2\theta}{16\tan^2\theta} = \dfrac{4}{1+\tan^2\theta}$

$\Leftrightarrow (1+\tan^2\theta)^2 = 64\tan^2\theta$

$\Leftrightarrow 1+\tan^2\theta = 8\tan\theta$

… 以下同様