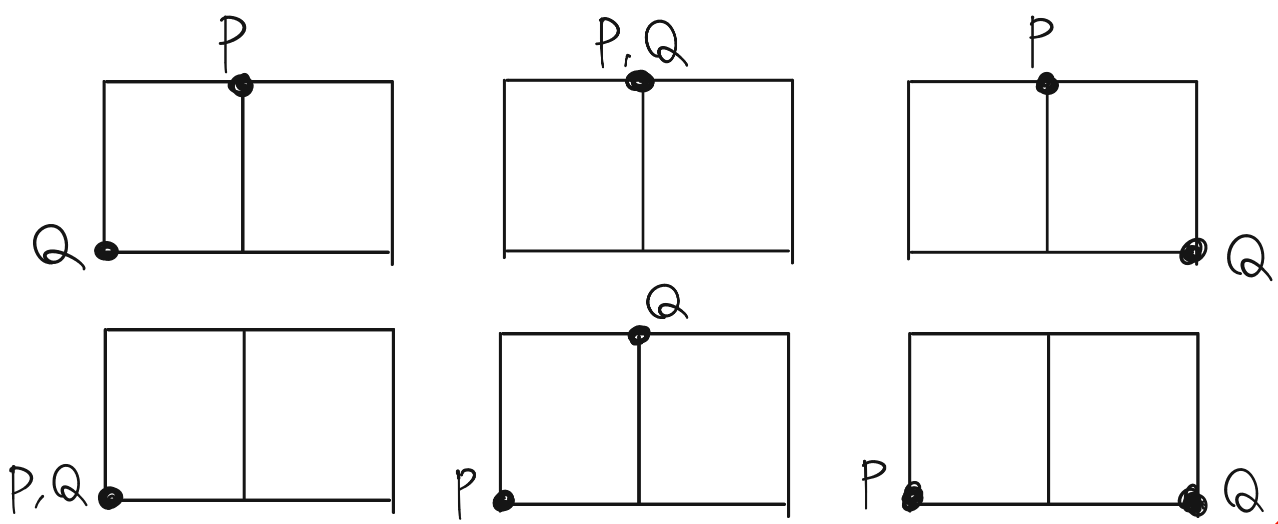
難しい確率漸化式の問題！

- まずは設定を正しく把握
- 一目見ても立式が難しいとき、
  → 実験して特殊性を見抜く！
  (パターンを絞る)

と言いつつも、やっぱり難しいですね。

(1) Pの行先の候補は2通り、
Q 〃 3通りなので、
時刻1でのP, Qの可能な配置は計6種。



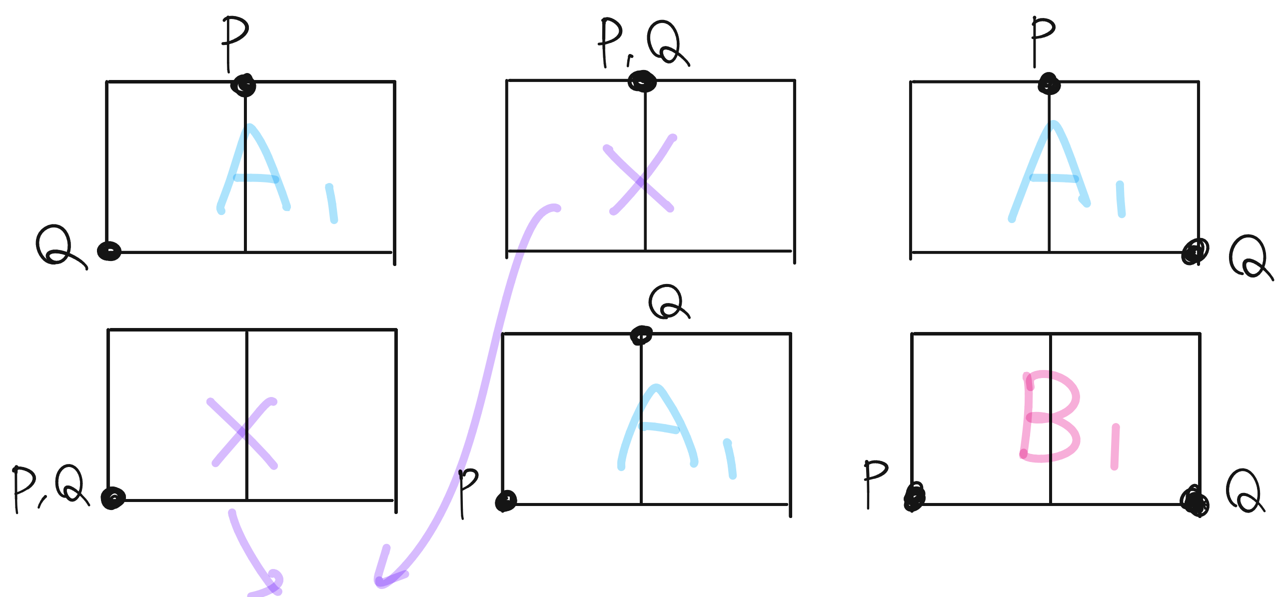
//

(2) a_1, b_1 が何を表すか、言語化して、把握する！

a_n に対応する事象を A_n、
つまり、時刻 n までに一度も同じ頂点になく時刻 n で同じ正方形にいる事象。

b_n に対応する事象を B_n、
つまり、時刻 n までに一度も同じ頂点になく時刻 n で同じ正方形にいない事象。

とおくと、(1)の配置はそれぞれ



ドボン（未来永劫 A_n や B_n が起きない）

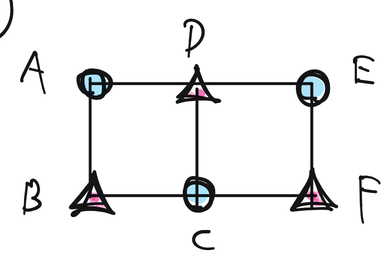
とふり分けられ、さらにこれらが起こる確率はそれぞれ $\frac{1}{6}\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{P}\times\underbrace{\frac{1}{3}}_{Q}\right)$ なので

$$a_1=\frac{1}{6}\times 3=\frac{1}{2}$$

$$b_1=\frac{1}{6}\times 1=\frac{1}{6}$$ と求められる。

a_2, b_2 については、実験して数え上げてもいいが、数が多い。(3)を見据えて、推移図を考えていくことにする。

A_n からの推移を考える。A_n のとき必ず一方は三叉路(C, D)にいて、もう一方はその対角(A, B, E, F)に配置される。

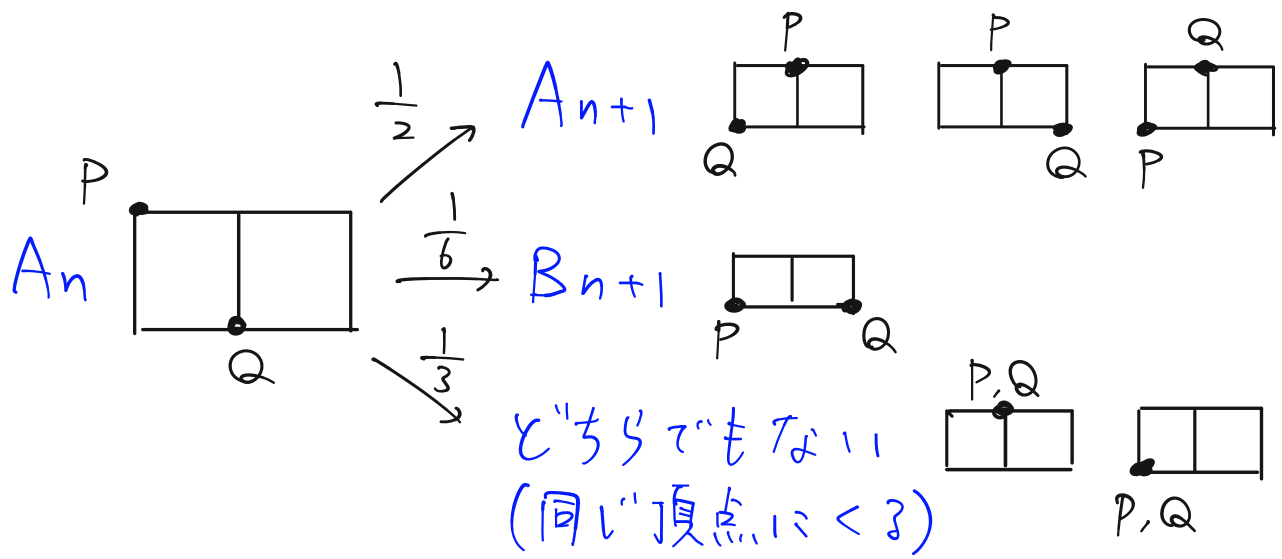


PとQはAとCから出発しているので、奇数時刻には△(B, D, F)、偶数時刻には○(A, C, E)にしかいない。

なので、同じ正方形上で、同じ頂点にいないとき、必ず同じ正方形上の対角に配置されるため。

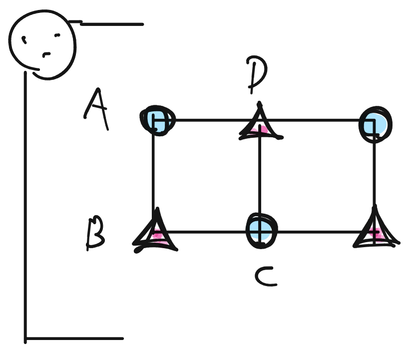
特殊性

たとえば時刻 n でPがAにいて、QがCにいるとすると、a_1, b_1 の結果から、推移は下のように表せる。



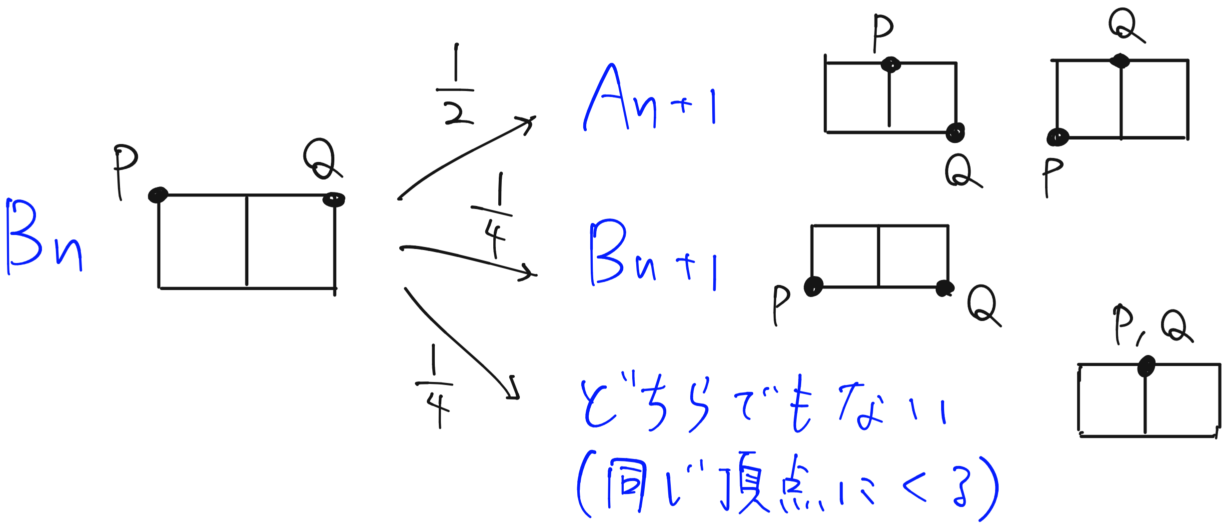
この推移確率は、A_n のどのような配置であっても変わらない ← 実験するとわかる。

次に、B_nからの推移を考える。B_nのとき、必ずPとQは<u>AとE</u>、もしくは<u>BとF</u>に存在する。



上で考えたことから、同一正方形上にない配置は、AとE、もしくはBとFのみ。特殊性

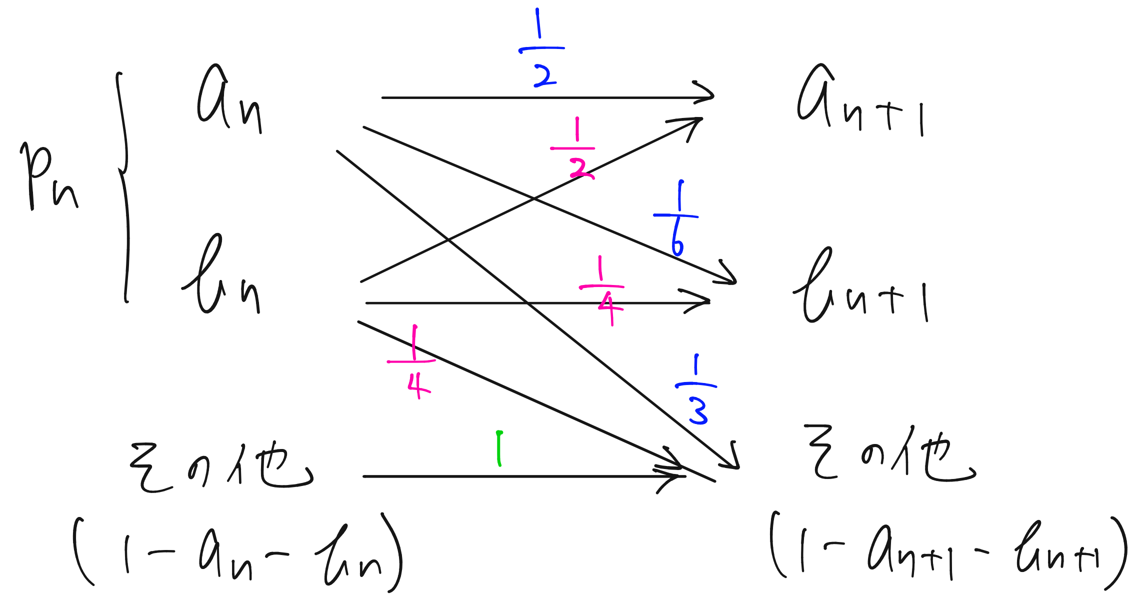
たとえば時刻nでPがAにいて、QがEにいるとすると、推移は下のように表せる。



この推移確率は、PがBにいて、QがFにいても変わらない ←実験するとわかる。

最後に、A_nにもB_nにも含まれない事象
(時刻nまでに同じ頂点にいたことがある)
から、A_{n+1}やB_{n+1}に推移することはない。

まとめると、推移図は、



となる。

よって，

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{3}$$

$$b_2 = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{4}b_1$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{8}$$

(3)
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n & \cdots ② \end{cases}$$

(4) p_nとは何か？ → $a_n + b_n$
連立漸化式解こうとすると，汚くなる．
(是非挑戦してみましょう！)
→ $a_n + b_n$ をムリヤリ作る．

①②より，

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n \quad \cdots ③$$

使いたい！

ここで，$a_n \geqq 0$ より，$\frac{2}{3}a_n \leqq \frac{3}{4}a_n$ である。

よって，③より

$$p_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} \leqq \frac{3}{4}(a_n + b_n) = \frac{3}{4}p_n$$

→ p_nの条件出せた！

となるので，これを繰り返し用いて，

$$p_n \leqq \frac{3}{4}p_{n-1}$$
$$\leqq \cdots$$
$$\leqq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} p_1 \quad \leftarrow a_1 + b_1$$
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$
$$\leqq \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$ となり示された。