東北大学 2021 理系第4問

座標平面において、次の条件 (∗) を満たす直線 l を考える。

(∗) l の傾きは 1 で、曲線 $y = x^3 - 2x$ と異なる 3 点で交わる。

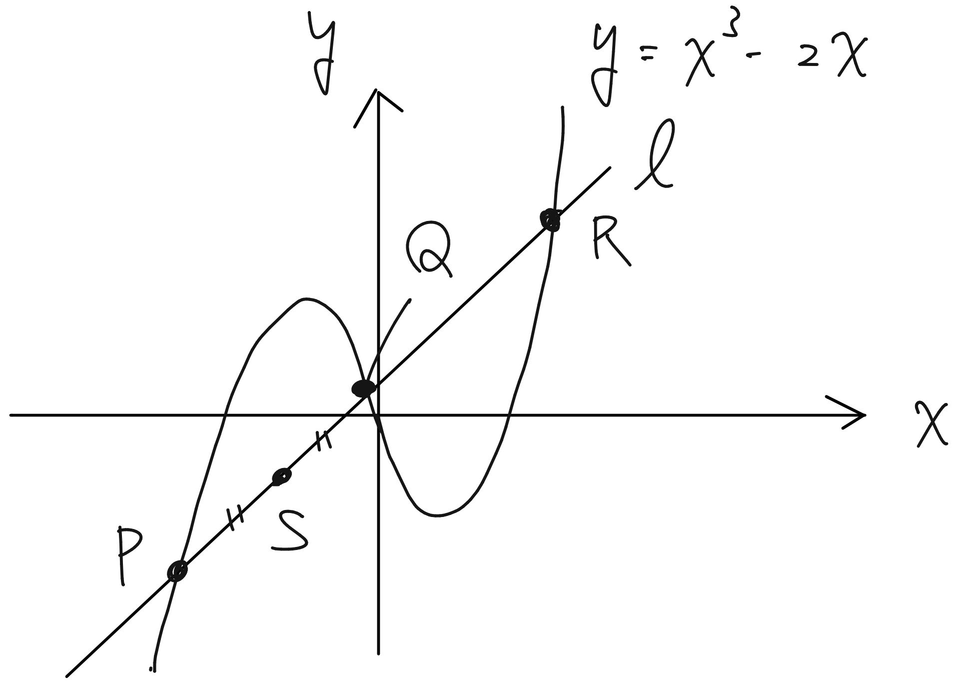
その交点を x 座標の小さなものから順に P, Q, R とし、さらに線分 PQ の中点を S とする。

(1) 点 R の座標を $(a, a^3 - 2a)$ とするとき、点 S の座標を求めよ。

(2) 直線 l が条件 (∗) を満たしながら動くとき、点 S の軌跡を求めよ。

(3) 直線 l が条件 (∗) を満たしながら動くとき、線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ。

☆グラフを書けるときはまず書く.
→情報を可視化して整理



(1) Sはどんな点か?
→ PとQの中点
→ これらの情報を、Rの座標から考えればOK.
→ ℓをおいて、連立して解と係数の関係

$\ell: y = x + b$ とおいてもいいが、
(→前回の初見動画) → これもラク
変数増えるので、ここでは
Rを通る傾き1の直線として立式する方法を紹介

$\ell: y-(a^3-2a) = x-a$ とおける。
整理して $y = x + a^3 - 3a$
いま、

$$x^3-2x = x+a^3-3a \quad \cdots ①$$
$$x^3-3x-a^3+3a=0$$

共有点の個数 = 実数解 x の個数

は異なる3実数解をもち、
PとQのx座標をp, qとおくと
解と係数の関係より

$$p+q+a=0 \quad \cdots ②$$
$$p+q=-a$$

Sのx座標
$=\dfrac{p+q}{2}$

となるので、Sのx座標は

$$\frac{p+q}{2} = -\frac{a}{2}$$ である。

これをℓの式に代入して、

$$y = -\frac{a}{2} + a^3 - 3a$$

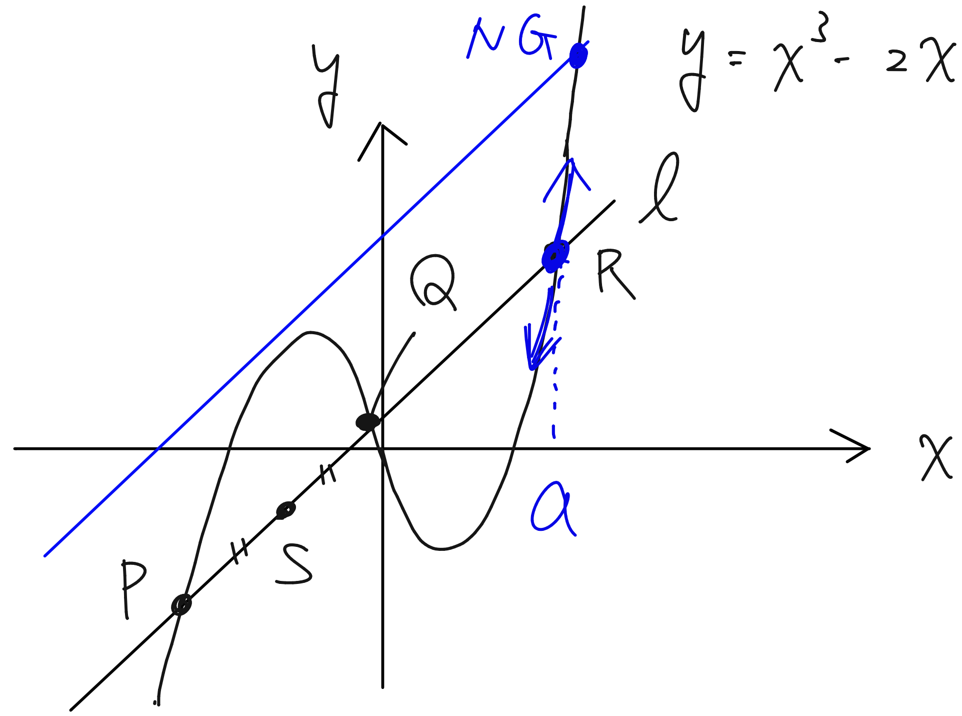
$$= a^3 - \frac{7}{2}a$$ を得る。

よってSの座標は $\left(-\frac{a}{2},\ a^3 - \frac{7}{2}a\right)$ //

(2) aのとりうる値の範囲を考える

どの条件を考えればいいか？

aを動かしていくと、3点で交わらなくなって設定に適さないことがわかる。→ 3点で交わる条件を求める



式でいく。

$y = x^3 - 2x$ と ℓ が R を含む異なる3点で交わる a の必要十分条件を求める。

それはつまり、① が異なる3つの実数解 x を持つ a の条件と同値。

→ どこが誤り ??

それはつまり、①が a以下の異なる3つの実数解 x を持つ a の条件と同値。

すでに $x=a$ は確定してる。

① $\iff (x-a)(x^2+ax+a^2-3)=0$

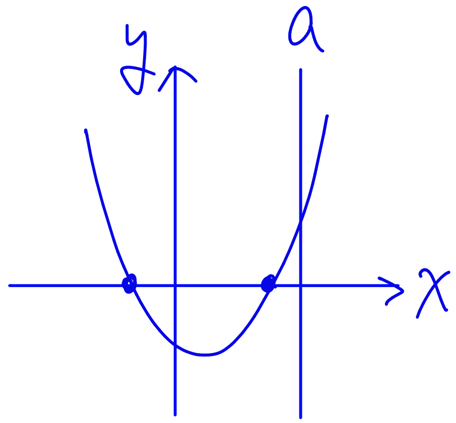
なので、$x^2+ax+a^2-3=0$ が、$x=a$未満の異なる2つの実数解 x を持つような a の条件を考える。

これで必要十分。

$f(x)=x^2+ax+a^2-3$

とおくと、

$$\begin{cases} D=a^2-4(a^2-3)>0 \\ \text{軸}: -\dfrac{a}{2}<a \\ f(a)=3a^2-3>0 \end{cases}$$



$$\iff \begin{cases} -2<a<2 \\ a>0 \\ a<-1,\ 1<a \end{cases}$$

かつ

$\iff 1<a<2$ を得る。

よって、求める軌跡上の点を (X,Y) とおくと、

1A2B良問 57 58

軌跡の極意

$$\begin{cases} X=-\dfrac{a}{2} \\ Y=a^3-\dfrac{7}{2}a \\ 1<a<2 \end{cases}$$

を満たす a が存在する

$$\iff \begin{cases} Y=(-2X)^3-\dfrac{7}{2}(-2X) \\ 1<-2X<2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Y=-8X^3+7X \\ -1<X<-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

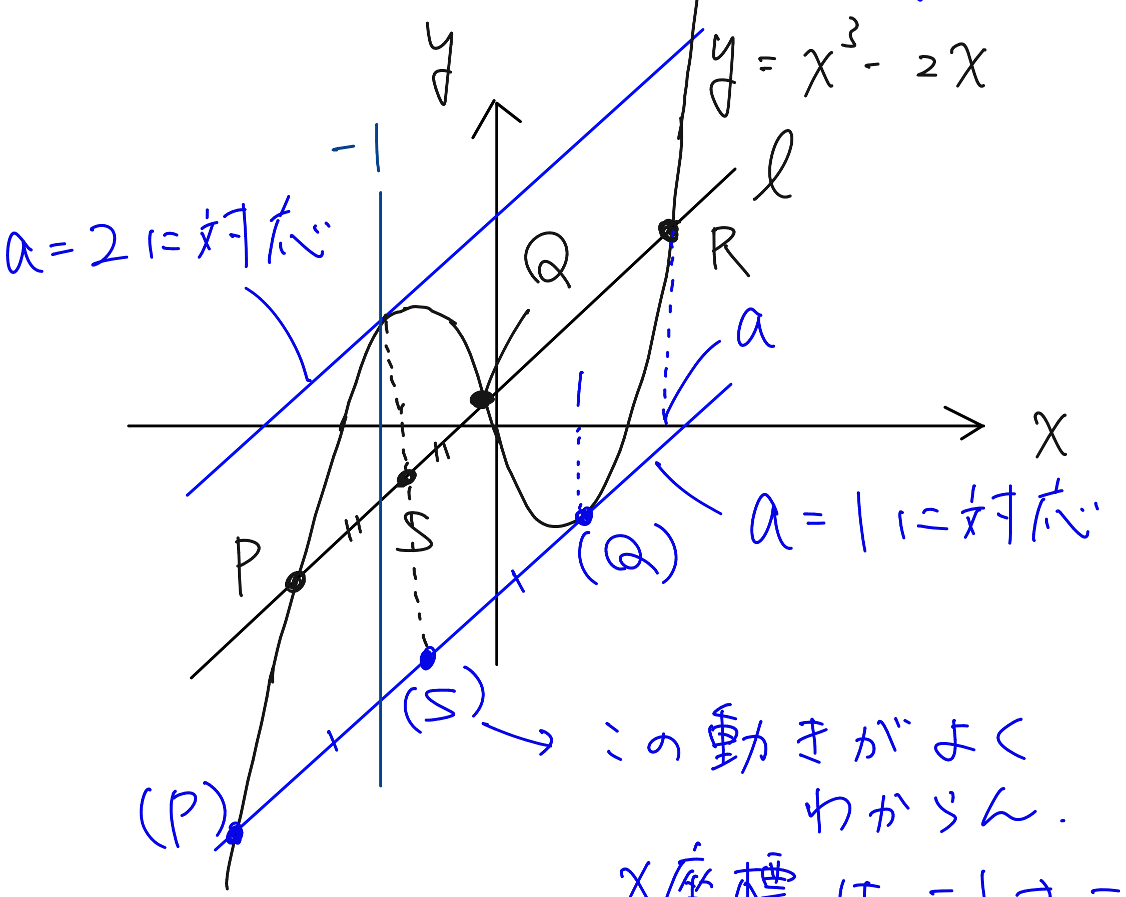
軌跡の式

となるので、求める軌跡は

$y=-8x^3+7x \quad \left(-1<x<-\frac{1}{2}\right)$ となる。

$a\to 2$ などで妥当性チェック.

(3) 面積計算はグラフが大事



→ この動きがよくわからん.

x座標は $-1\to -\frac{1}{2}$?

$-\frac{1}{2}\to -1$?

(1)の結果から、

$a\to 1$ のときSのx座標は $-\frac{1}{2}$ へ

$a\to 2$ 〃 -1 へ 近づく。

Rが左へ

Rが右へ

また、$a\to 1$ のときPのx座標は -2 に近づく。($\because$ ②)

→ これで面積計算できる.

よってグラフから、求める面積は

$a=1$ として計算

$$\int_{-2}^{-1}\left\{(x^3-2x)-(x-2)\right\}dx$$
$$+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\left\{(-8x^3+7x)-(x-2)\right\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{-1} + \left[-2x^4 + 3x^2 + 2x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}(1-16) - \frac{3}{2}(1-4) + 2(-1+2) - 2\left(\frac{1}{16} - 1\right) + 3\left(\frac{1}{4} - 1\right) + 2\left(-\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= -\frac{15}{4} + \frac{9}{2} + 2 + \frac{15}{8} - \frac{9}{4} + 1$$

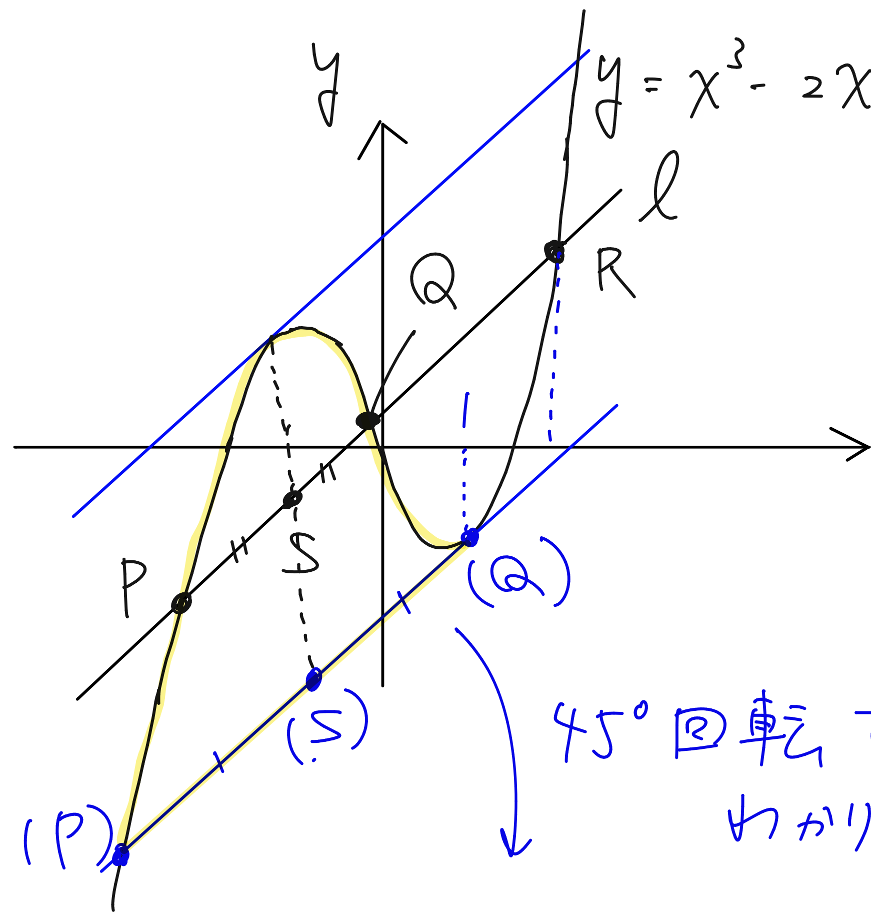
$$= \frac{27}{8}$$

☆妥当性チェック

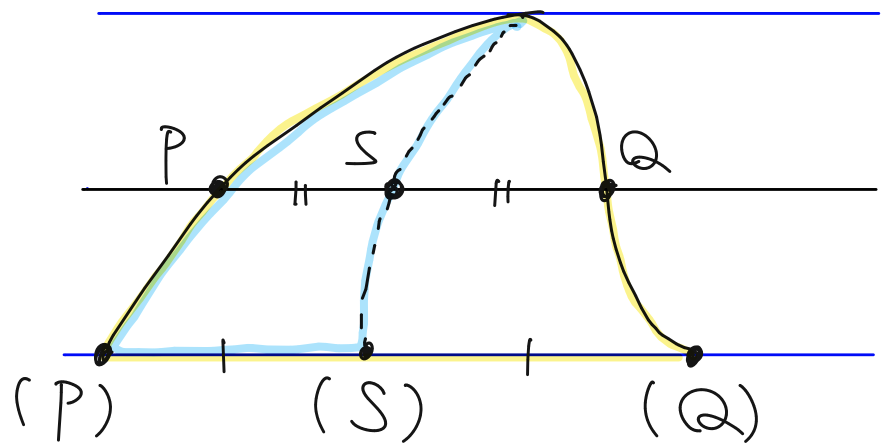
PQが通過する面積の半分になっているか？

(カヴァリエリの原理)

これは求めやすい！



45°回転するとわかりやすい



平行線で常に中点