

東北大学 2022 理系第4問

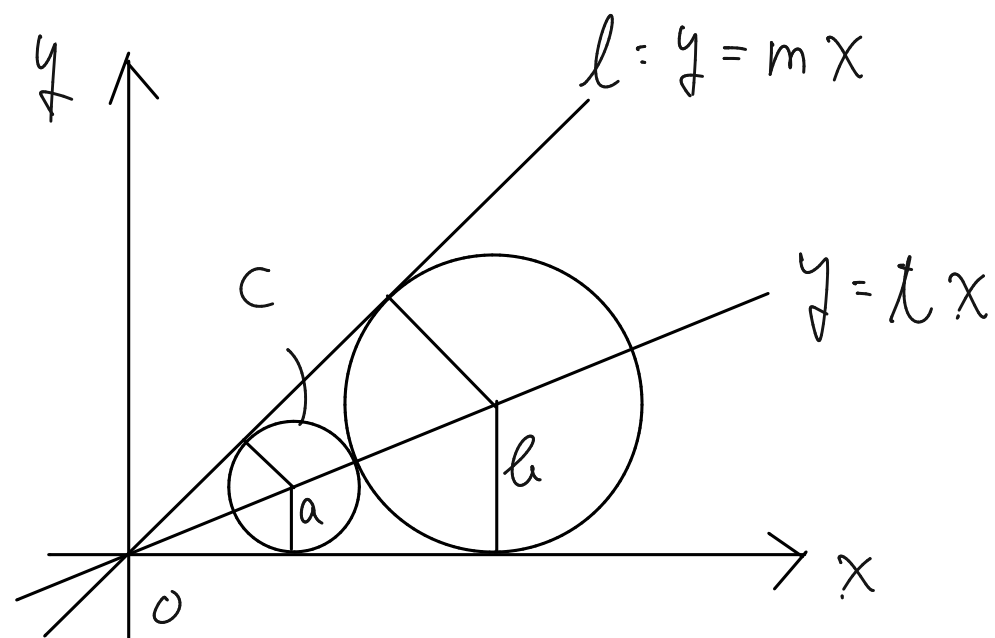
xy 平面の第 1 象限内において、直線 $l: y = mx$ ($m > 0$) と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし、円 C の中心を通る直線 $y = tx$ ($t > 0$) を考える。また、直線 l と x 軸、および、円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする。ただし、 $b > a$ とする。

- (1) m を用いて t を表せ。
- (2) t を用いて $\frac{b}{a}$ を表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{m \rightarrow +0} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right)$ を求めよ。

動画や公式を検索しやすいアプリ okke



☆図が書けるときは書く!



(1) $\times$ 傾きが2倍

○ 角度が2倍

↑ $y = tx$ が二等分線になる.

∴ 三角形の合同条件

→ 角度でギロンスると立式しやすそう

傾き $\leftrightarrow \tan \theta$ (良問1A2B 72/100)

$\left\{ \begin{array}{l} y = mx \text{ と } x \text{ 軸のなす鋭角を } \theta, \\ y = tx \text{ " " } \theta' \text{ とおくと,} \end{array} \right.$
 $\theta = 2\theta'$ が成り立つ。

定義より $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ なので ← $\tan$ とれる!!

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan 2\theta' \\ &= \frac{2 \tan \theta'}{1 - \tan^2 \theta'} \quad \text{で"あり".} \end{aligned}$$

$\tan \theta = m, \tan \theta' = t$ より、代入して

$$m = \frac{2t}{1 - t^2} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \text{ で}$$

$$m(1 - t^2) = 2t$$

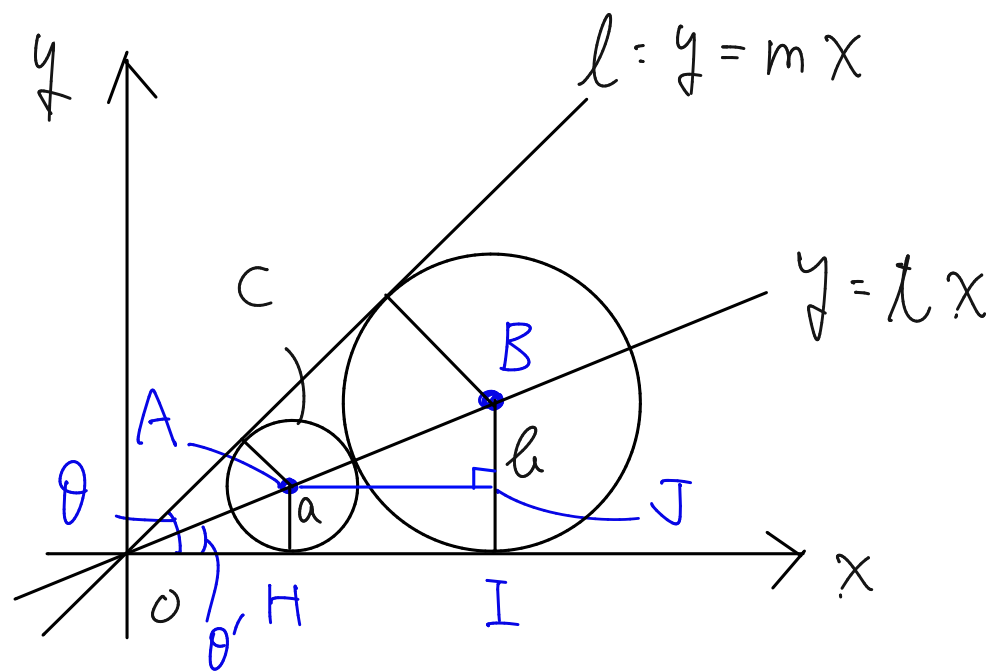
$$mt^2 + 2t - m = 0$$

$$m \neq 0, t > 0 \text{ より} \quad t = \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}$$

妥当性
チェック!

(2) 2円の内接・外接
→ 中心間を結ぶ!

円Cの中心をA, 半径 l の円の中心をBと置く。



Aからx軸に下ろした垂線の足をH,
B " " I
とし、AからBIに下ろした垂線の足をJとする。

$\triangle ABJ$ に注目!

a と l と θ の関係式が作れる。

→ $\frac{l}{a}$ を θ で表せんじゃないか?

$\triangle ABJ$ について、

$AB = a + l$, $BJ = l - a$, $\angle BAJ = \theta'$ より、

$$\sin \theta' = \frac{l - a}{a + l} \quad \leftarrow \text{右辺は } \frac{l}{a} \text{ の式になる!}$$

※ $AB = a + l$ となる理由。

2円の接点をKとす。

Kでの共通接線を l' とすると、

$AK \perp l'$, $BK \perp l'$ より、

$\angle AKB = 180^\circ$ となり、A, K, Bは
一直線上にある。

AとBを結ぶ直線は1つしかない

ので、KはAB上にある。∴ $AB = AK + KB$

よって

$$\sin \theta' = \frac{\frac{b}{a} - 1}{1 + \frac{b}{a}}$$

これについて求めたい
 $\rightarrow \frac{b}{a}$ について解く

$$\sin \theta' \left(1 + \frac{b}{a}\right) = \frac{b}{a} - 1$$

$$\frac{b}{a} (1 - \sin \theta') = 1 + \sin \theta'$$

$$\sin \theta' \neq 1 \text{ より、}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1 + \sin \theta'}{1 - \sin \theta'} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、 $\tan \theta' = \tau$ より、

$$\sin \theta' = \sqrt{1 - \cos^2 \theta'}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta'}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tau^2}}$$

$$= \frac{\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}} \quad (\because \tau > 0)$$

と仮定して、①より

$$\frac{b}{a} = \frac{1 + \frac{\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}}}{1 - \frac{\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \tau^2} + \tau}{\sqrt{1 + \tau^2} - \tau}$$

を得る。

★妥当性チェック！ > 1 か？

$\tau \rightarrow 0$ のとき 2つの円は近づいていく。

$\tau \rightarrow 1$ のとき $a = 1$ として b を求められる。

$$(3) \quad \lim_{m \rightarrow +0} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 τ の式 τ の式

→ m で極限とるか. τ で極限とるか
要検討.

$\frac{b}{a}$ を m で表すのが大変なので
 τ にする.

(1)(2) より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) &= \frac{1 - \tau^2}{2\tau} \times \frac{2\tau}{\sqrt{1 + \tau^2} - \tau} \\ &= \frac{1 - \tau^2}{\sqrt{1 + \tau^2} - \tau} \end{aligned}$$

ここで、 $m \rightarrow +0$ のとき

$$\tau = \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}$$

$$= \frac{-1 + (1 + m^2)}{m(1 + \sqrt{1 + m^2})}$$

$$= \frac{m}{1 + \sqrt{1 + m^2}} \xrightarrow{m \rightarrow +0} +0 \text{ なので、}$$

求める極限は、

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{1 - \tau^2}{\sqrt{1 + \tau^2} - \tau} = \underline{\underline{1}} \text{ となる。}$$