

九州大学 2023 文系第4問

ω を $x^3 = 1$ の虚数解のうち虚部が正であるものとする。さいころを繰り返し投げて、次の規則で 4 つの複素数 $0, 1, \omega, \omega^2$ を並べていくことにより、複素数の列 $z_1, z_2, z_3, \dots$ を定める。

- $z_1 = 0$ とする。
- z_k まで定まったとき、さいころを投げて、出た目を t とする。このとき z_{k+1} を以下のように定める。
 - $z_k = 0$ のとき、 $z_{k+1} = \omega^t$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 1, 2$ のとき、 $z_{k+1} = 0$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 3$ のとき、 $z_{k+1} = \omega z_k$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 4$ のとき、 $z_{k+1} = \overline{\omega z_k}$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 5$ のとき、 $z_{k+1} = z_k$ とする。
 - $z_k \neq 0, t = 6$ のとき、 $z_{k+1} = \overline{z_k}$ とする。

ここで複素数 z に対し、 $\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。以下の問いに答えよ。

- (1) $\omega^2 = \overline{\omega}$ となることを示せ。
- (2) $z_n = 0$ となる確率を n の式で表せ。
- (3) $z_3 = 1, z_3 = \omega, z_3 = \omega^2$ となる確率をそれぞれ求めよ。
- (4) $z_n = 1$ となる確率を n の式で表せ。

★ とにかく手を動かして実験！
 まずは設定を正しく理解することに
 全力を集中させる！

★ $x^3=1$ の解は $1, \omega, \omega^2$


“>” “>” 回す。

(1) は普通に解いて示せるので
 まずはやっとか。(xωに役立つ)

(1) $x^3=1$
 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
 この虚数解は、 $x^2+x+1=0$ を解いて

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

題意より $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ (虚部 > 0)

よって

$$\omega^2 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \bar{\omega} \text{ が示される。}$$

(2) $z_1=0 \rightarrow z_2 = \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \omega^6 \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & \omega \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & \omega^2 \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & 1 \end{array}$$

$z_3 = 0 \leftarrow 0$ はこれのみ。

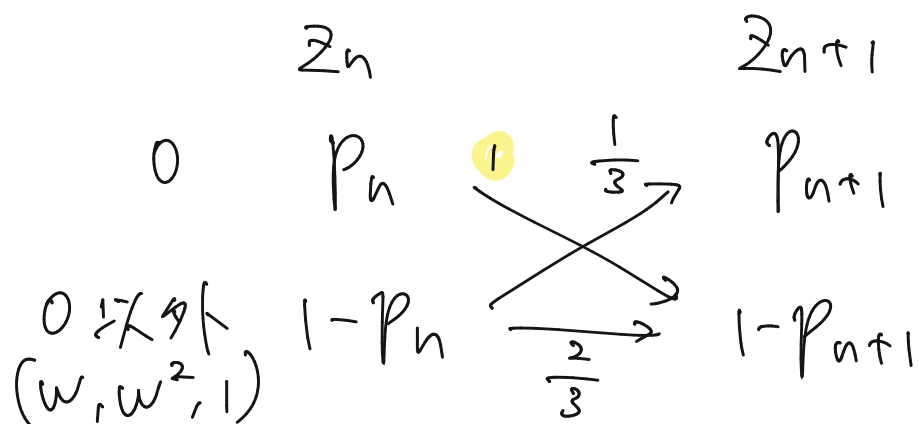
$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} 1, 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline 6 \end{array} \begin{array}{l} z_3 = 0 \\ z_3 = \omega z_2 \\ z_3 = \overline{\omega z_2} \\ z_3 = z_2 \\ z_3 = \overline{z_2} \end{array} \begin{array}{l} \omega^2, 1, \omega \\ \omega, 1, \omega^2 \\ \omega, \omega^2, 1 \\ \omega^2, \omega, 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \text{共役} \\ \text{共役} \end{array}$$

⇒ 確かに状態としては $0, 1, \omega, \omega^2$ のみ。

⇒ 推移図が書けるので、
漸化式で一般項を求める作戦で。
(直接求めるのはムズい)

⇒ ここまで見えていけば、全ての
一般項をおいて解いていきたい。
ただ、実践的には (2)(3) を解き
ながら理解していく感じが、
一旦 (2)(3) はそれぞれ解きます！

$z_n = 0$ となる確率を p_n とおくと、
題意より、下の推移となるので



$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1-p_n) \quad \text{を得る。}$$

これを解くと、

$$p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$$

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

$$p_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\underbrace{p_1 - \frac{1}{4}}_1\right)$$

$$\therefore p_n = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \quad \text{となる。}$$

★ $n=2$ で妥当性チェック。 $p_2 = 0$?

(3) さっきの推移が整理できていければ
計算するだけ。

$z_3 = 1$ となるのは、

$$(z_2, \tau) = (w^2, 3)(w^2, 4)(1, 5)(1, 6)$$

であり、 z_2 は等確率で $w, w^2, 1$ であるから、 $z_3 = 1$ となる確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times 4 = \frac{2}{9}$$

同様に、

$z_3 = w$ となるのは

$$(z_2, \tau) = (1, 3)(w, 4)(w, 5)(w^2, 6)$$

であるから、 $z_3 = w$ となる確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times 4 = \frac{2}{9}$$

$z_3 = w^2$ となるのは

$$(z_2, \tau) = (w, 3)(1, 4)(w^2, 5)(w, 6)$$

であるから、 $z_3 = w^2$ となる確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times 4 = \frac{2}{9} \quad \text{である。}$$

☆ $z_3 = 0$ の確率で妥当性チェック！

→ $1, w, w^2$ は等確率？というあたりがっく。

(4) ここは漸化式立式する。

(3) と同じ考え方でいける！

直前は 0 もありうるので注意。

$z_n = 1$ となる確率を g_n

$z_n = w$ " r_n

$z_n = w^2$ " s_n とおくと、

$$g_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3} g_n + \frac{1}{3} s_n \quad \dots \textcircled{1}$$

直前が 0 (1, 5-6) (w^2 , 3-4)
で $\tau = 3-6$ $z_n \quad \tau$ $z_n \quad \tau$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{6} q_n + \frac{1}{3} r_n + \frac{1}{6} s_n \dots (2)$$

直前が0 (1, 3) (w, 4.5) (w^2, 6)
でt=1.4 z_n t

$$s_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{6} q_n + \frac{1}{3} r_n + \frac{1}{6} s_n \dots (3)$$

直前が0 (1, 4) (w, 3.6) (w^2, 5)
でt=2.5 z_n t

を得る。

→ $r_n = s_n$ はすぐ言えそう。

②③より $n \geq 2$ のとき $r_n = s_n$

→ r_1, s_1 はまだ不明!

さらに、 $r_1 = s_1 = 0$ より、全てのnについて

$r_n = s_n$ となる。 $\nwarrow z_1 = 0$

このとき③は

$$s_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{6} q_n + \frac{1}{2} s_n \dots (2')$$

であり、

$$\textcircled{1} \quad q_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{3} q_n + \frac{1}{3} s_n$$

$$\textcircled{3}' \quad s_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{1}{6} q_n + \frac{1}{2} s_n$$

→ ③'と同じ並びが! !

① - ③' より

$$q_{n+1} - s_{n+1} = \frac{1}{6} (q_n - s_n) \text{ となるので}$$

$$q_n - s_n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} (q_1 - s_1)$$

$$= 0 \quad (\because q_1 = s_1 = 0)$$

よって $q_n = s_n$ であり、

$q_n = r_n = s_n$ を得る。

→ やはり全て等しかった！

どうやって値を求めようか？

漸化式を解いてもいいけど...

ここで、 $p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ なので、

$$q_n = \frac{1}{3} (1 - p_n)$$

これで全事象。
複数次おくときは常にイシキ。

$$q_n + r_n + s_n = q_n + q_n + q_n$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{4} \right) \right)$$

(2) より！

$$= \underline{-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{4}} \quad \text{と決まる。}$$

☆妥当性チェック！