

第1問

$$[1] (1) \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$$

$$= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ より } \frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6}\pi \text{ なるので.}$$

$$\text{最大値は } \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ . つまり } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき } \underline{2} \text{ となる。}$$

$$(2) y = \sin \theta + p \cos \theta$$

$$(i) p=0 \text{ のとき } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ で } \text{最大値 } \underline{1} \text{ となる。}$$

$$(ii) y = \sqrt{1+p^2} \left(\cos \theta \cdot \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + \sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right)$$

$$= \sqrt{1+p^2} \cos(\theta - \alpha) \rightarrow \underline{(9)} \neq$$

$$\text{ここで } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \underline{(1)} \neq$$

$$\rightarrow \underline{(3)} \neq$$

このとき $\theta - \alpha = 0$ となる θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に存在するので.

$$y \text{ は } \theta = \alpha \text{ で最大値 } \sqrt{1+p^2} \text{ となる。} \rightarrow \underline{(1)} \neq \underline{(9)} \neq$$

(iii) $p < 0$ のとき, θ が 0 から $\frac{\pi}{2}$ に動いていくと.

$y = \underbrace{\sin \theta}_{\text{増}} + \underbrace{p \cos \theta}_{\text{増}}$ は増加する。よって

$\theta = \frac{\pi}{2}$ で 最大値 1 をとる。 $\rightarrow$ ②, ①

$$[2] \quad f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}, \quad g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

$$(1) \quad f(0) = \frac{2}{2} = \underline{1} \quad , \quad g(0) = \frac{0}{2} = \underline{0}$$

$2^x > 0, 2^{-x} > 0$ より. 相加相乗平均から

$$f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} \geq \sqrt{2^x 2^{-x}} = 1$$

等号成立は $2^x = 2^{-x}$ つまり $x = 0$ のとき.

よって $f(x)$ は $x = \underline{0}$ で 最小値 1 をとる。

$$g(x) = -2 \Leftrightarrow 2^x - 2^{-x} = -4$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 1 = 0$$

$$2^x > 0 \text{ より } 2^x = -2 + \sqrt{5}$$

$$x = \log_2 (\underline{\sqrt{5}} - \underline{2})$$

$$(2) f(-x) = \frac{2^{-x} + 2^x}{2} = f(x) \rightarrow \textcircled{0}$$

$$g(-x) = \frac{2^{-x} - 2^x}{2} = -\frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -g(x) \rightarrow \textcircled{3}$$

$$\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = \frac{(2^x + 2^{-x})^2}{4} - \frac{(2^x - 2^{-x})^2}{4}$$

$$g(2x) = \frac{2^{2x} - 2^{-2x}}{2} = \frac{(2^x + 2^{-x})(2^x - 2^{-x})}{2} = 2 f(x) g(x)$$

$$(3) f(\alpha + \beta) = \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{-(\alpha+\beta)}}{2}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) &= \frac{2^\alpha + 2^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{2^\beta + 2^{-\beta}}{2} + \frac{2^\alpha - 2^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{2^\beta - 2^{-\beta}}{2} \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{-(\alpha+\beta)}}{2} \end{aligned}$$

となり一致するから $\textcircled{1}$

(β に 0 を代入して、見当をつけた)

第2問

$$(1) \begin{cases} y = 3x^2 + 2x + 3 \quad \dots \textcircled{1} & \rightarrow y' = 6x + 2 \\ y = 2x^2 + 2x + 3 \quad \dots \textcircled{2} & \rightarrow y' = 4x + 2 \end{cases}$$

どちらも y 軸との交点の y 座標は 3 ?

①の $(0, 3)$ での接線の方程式は

$$y - 3 = 2x$$

$$y = \underline{2x} + \underline{3} \quad \text{?}$$

$$y = -x^2 + 2x + 3 \rightarrow y' = -2x + \underline{2} \quad \text{かつ、}$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = 3$$

$\rightarrow x = 0$ での接線は上と一致。 : ④ I

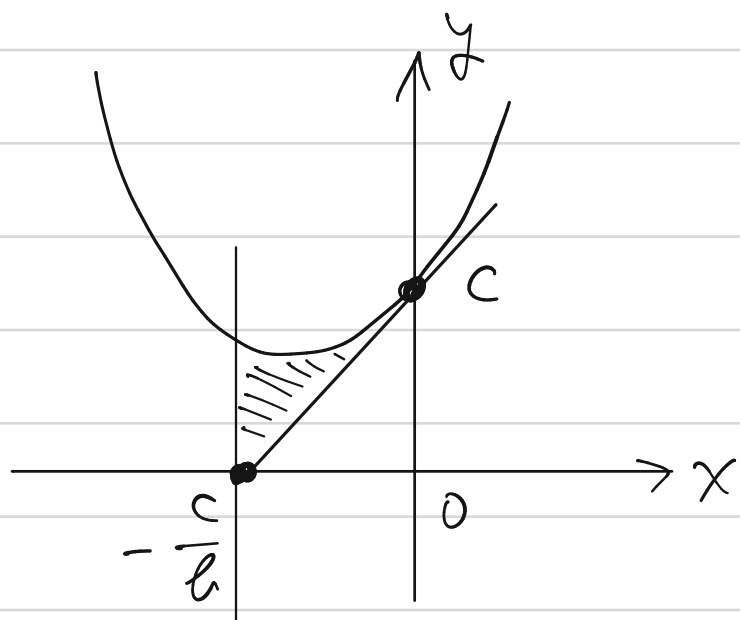
$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow x = 0 \text{ のとき } y = \underline{c} \quad \text{?}$$

$y' = 2ax + b$ より、 $x = 0$ での接線の方程式は

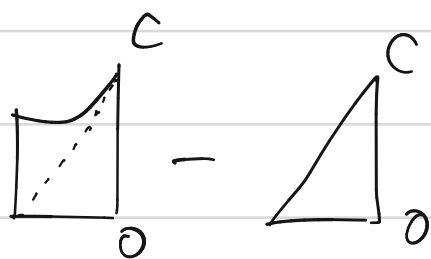
$$y - c = bx$$

$$y = \underline{bx} + \underline{c} \quad \text{?}$$

$$y = 0 \text{ とするとき } x = -\underline{\frac{c}{b}} \quad \text{?}$$



$$S = \int_{-\frac{c}{b}}^0 (ax^2 + bx + c) - \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{b} \quad \leftarrow$$



$$= \left[\frac{1}{3} ax^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right]_{-\frac{c}{b}}^0 - \frac{c^2}{2b}$$

$$= \frac{ac^3}{3b^3} - \frac{c^2}{2b} + \frac{c^2}{b} - \frac{c^2}{2b}$$

$$= \frac{ac^3}{3b^3} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$a = 1 \text{ とする. } c^3 = 3Sb^3$$

$$c = \sqrt[3]{3S} b \quad (b, c \text{ は実数より})$$

よって、根の形は ① 也

$$(2) \begin{cases} y = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 5 & \rightarrow y' = 12x^2 + 4x + 3 \\ y = -2x^3 + 7x^2 + 3x + 5 & \rightarrow y' = -6x^2 + 14x + 3 \\ y = 5x^3 - x^2 + 3x + 5 & \rightarrow y' = 15x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

y軸との交点のy座標は 5 ✓

(0, 5)での接線は

$$y - 5 = 3x$$

$$y = \underline{3x} + \underline{5} \quad \text{7} \quad \text{4}$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow x=0 \text{ のとき } y = \underline{d} \quad \text{11}$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

(0, d)での接線の方程式は

$$y - d = cx$$

$$y = \underline{cx} + \underline{d} \quad \text{7} \quad \text{1}$$

$h(x) = f(x) - g(x) = 0$ は $x=0$ で重解を持つ。

さらに、 $x=0$ 以外の解 α とおくと。

解と係数の関係より

$$0 + 0 + \alpha = -\frac{b}{a} < 0$$

$$\therefore \alpha < 0$$

→ 根の形は (2) ✓

解と共有点の関係より、共有点のx座標は $-\frac{b}{a}$ と 0
= 2 点 ✓

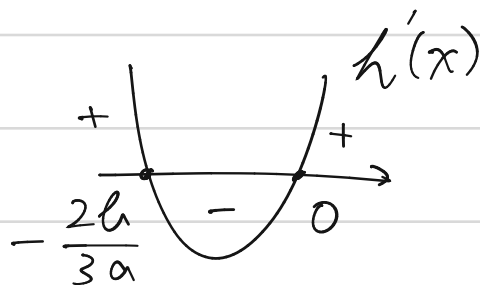
$h(x) = f(x) - g(x)$ が 極大値 を 持つとき.

$|f(x) - g(x)| \quad (-\frac{b}{a} \leq x \leq 0)$ は 最大 となる。

$$h(x) = ax^3 + bx^2$$

$$h'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$= x(3ax + 2b) \text{ より.}$$



$x = -\frac{2b}{3a} \quad (< 0)$ で 極大値 を とる。

ハヒフヘホ、～

計算 が 重たい ですね ……

第3問 (選択)

(1) X は二項分布 $B(\underset{\uparrow}{100}, \underset{\uparrow}{0.5})$ に従う。 $\rightarrow \textcircled{3}$

$$E(X) = 100 \times 0.5 \\ = \underline{50}$$

$$V(X) = 100 \times 0.5 \times 0.5 \\ = 25$$

$$\text{よって } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \underline{5}$$

$Z = \frac{X - 50}{5}$ は標準正規分布に従う。

$$p_5 = P\left(Z \leq \frac{36 - 50}{5}\right)$$

$$= P(Z \leq -2.8)$$

$$= 0.5 - 0.4974$$

$$= 0.0026 \approx 0.003 \rightarrow \textcircled{1}$$

母比率 0.4 のとき、 $X \sim B(100, 0.4)$ となり、

$$E(X) = 40, \quad V(X) = 24, \quad \sigma(X) = \sqrt{24}$$

よって $Z' = \frac{X - 40}{\sqrt{24}}$ が標準正規分布に従う。

$$p_4 = P(Z' \leq \frac{36-40}{\sqrt{24}})$$

$$= P(Z' \leq \underbrace{-\frac{2}{\sqrt{6}}}_{> -2.8}) > p_5 \rightarrow \textcircled{2} \text{カ}$$

(3) $\frac{204-m}{\frac{150}{\sqrt{100}}}$ は標準正規分布に従うとよく.

$$-1.96 \leq \frac{204-m}{15} \leq 1.96$$

$204-29.4 \leq m \leq 204+29.4$ が 95%信頼区間となる。

$$C_1 + C_2 = \underline{408} \text{キカケ}$$

$$C_2 - C_1 = \underline{58.8} \text{コサシ}$$

両側にはけ出すことはあり得るので。 ③ ス

(4) ③ セ

(5) 標本平均が36から動くものの、母標準偏差と人数が全て等しいので、95%信頼区間の幅は変わらない。区間の両端は変わりうる。 $\rightarrow \underline{\textcircled{2}} \underline{\textcircled{4}}$
リ タ

第4問 (選択)

$$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1} b_n + 3b_{n+1} = 0 \quad \dots (1)$$

$$(1) \quad a_n = \underline{3} + (n-1)p \quad \dots (2)$$

$$a_{n+1} = 3 + np \quad \dots (3)$$

$$b_n = \underline{3} \cdot r^{n-1}$$

① ②の両辺に b_n を割ると

$$r a_n - 2 a_{n+1} + 3 r = 0$$

$$\underline{2} a_{n+1} = r (a_n + \underline{3})$$

②③に代入すると

$$2(3 + np) = r(6 + (n-1)p)$$

$$(r - \underline{2})np = r(\underline{p} - \underline{6}) + \underline{6}$$

$$r = 2 \text{ のとき } 2(p - 6) + 6 = 0$$

$$p = \underline{3}$$

$$(2) \quad (2)より \quad \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 3k = \underline{\frac{3}{2}} n(\underline{n+1})$$

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1} = 3 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = \underline{3} \cdot \frac{(2^n - \underline{1})}{\underline{2}}$$

$$(3) \quad a_n c_{n+1} - 4a_{n+1} c_n + 3c_{n+1} = 0$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{4a_{n+1}}{a_n + 3} c_n \\ &= \frac{4(3n+3)}{3n+3} c_n = 4c_n \rightarrow \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$(4) \quad d_n l_{n+1} - g d_{n+1} l_n + u l_{n+1} = 0$$

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= \frac{1}{g} \cdot \frac{l_{n+1}}{l_n} \cdot (d_n + u) \\ &= \frac{2}{g} (d_n + u) \end{aligned}$$

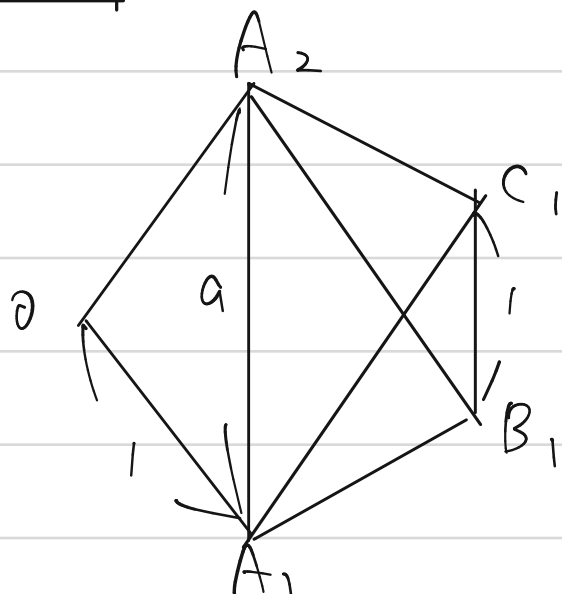
これが「 $0 < \text{公比} < 1$ の等比数列」となる必要十分条件は

$$0 < \frac{2}{g} < 1 \quad \text{かつ} \quad u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{g > 2} \quad \text{かつ} \quad \underline{u = 0}$$

第5問 (選択)

正五角形

(1)



$$\angle A_1 C_1 B_1 = 36^\circ$$

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = a \overrightarrow{B_1 C_1} \quad \text{よ'}). \quad \overrightarrow{B_1 C_1} = \frac{1}{a} (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})$$

$$\begin{aligned} \text{よ'}). \quad \overrightarrow{B_1 C_1} &= -a \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + a \overrightarrow{OA_2} \\ &= \underline{(a-1)} (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a} = a - 1 \quad \rightarrow \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_2} + a \overrightarrow{OA_1}$$

$$|\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}|^2 = a^2 = \underline{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \quad \text{カキ}$$

$$|\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}|^2 = 1 + 1 - 2 \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_1} \quad \text{よ'}).$$

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = \underline{\frac{1-\sqrt{5}}{4}} \quad \text{カキ}$$

$$\vec{OB_2} = \vec{OA_3} + a \vec{OA_2}$$

$$\vec{OA_2} \cdot \vec{OA_3} = \vec{OA_3} \cdot \vec{OA_1} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ より.}$$

$$\begin{aligned} \vec{OA_1} \cdot \vec{OB_2} &= \vec{OA_1} \cdot (\vec{OA_3} + a \vec{OA_2}) \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4} + a \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4} (a+1) \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \rightarrow \textcircled{9} \text{ シ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OB_1} \cdot \vec{OB_2} &= (\vec{OA_2} + a \vec{OA_1}) \cdot (\vec{OA_3} + a \vec{OA_2}) \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4} + a \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4} + a + a^2 \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{4} (a^2 + a + 1) + a \\ &\quad = 2a + 2 \end{aligned}$$

$$= 2(\vec{OA_1} \cdot \vec{OB_2}) + a$$

$$= 2 \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0 \rightarrow \textcircled{0} \text{ ス}$$

$$\vec{B_2D} = \vec{OB_1} \text{ より. 平行四辺形.}$$

$$\text{かつ. } |\vec{OB_1}| = |\vec{OB_2}| = a \text{ かつ } \vec{OB_1} \perp \vec{OB_2} \text{ より.}$$

$$\triangle OB_1DB_2 \text{ は正方形である.} \rightarrow \textcircled{0} \text{ セ}$$

本当にお疲れさまでした...!!