

大阪大学 2023 文系第2問

正の実数 a, x に対して、 $y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^3 + a(\log_{\sqrt{2}} x)(\log_4 x^3)$ とする。

- (1) $t = \log_2 x$ とするとき、 y を a, t を用いて表せ。
- (2) x が $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ の範囲を動くとき、 y の最大値 M を a を用いて表せ。

$$y = \left(\log_{\frac{1}{2}} X\right)^3 + a \left(\log_{\sqrt{2}} X\right) \left(\log_4 X^3\right)$$

(1) ヒントに甘えて底を2にそろえよう! 前へ

$$y = \left(\frac{\log_2 X}{\log_2 \frac{1}{2}}\right)^3 + a \cdot \frac{\log_2 X}{\log_2 \sqrt{2}} \cdot \frac{\log_2 X}{\log_2 4}$$

$\underbrace{\log_2 \frac{1}{2}}_{-1} \quad \underbrace{\log_2 \sqrt{2}}_{\frac{1}{2}} \quad \underbrace{\log_2 4}_2$

$$= -(\log_2 X)^3 + 3a(\log_2 X)^2$$

ここで $t = \log_2 X$ とおくと、

$$y = -t^3 + 3at^2 \quad \text{と表す。}$$

ヒントなしでも
できるように!

(2) $X \rightarrow t \rightarrow y$

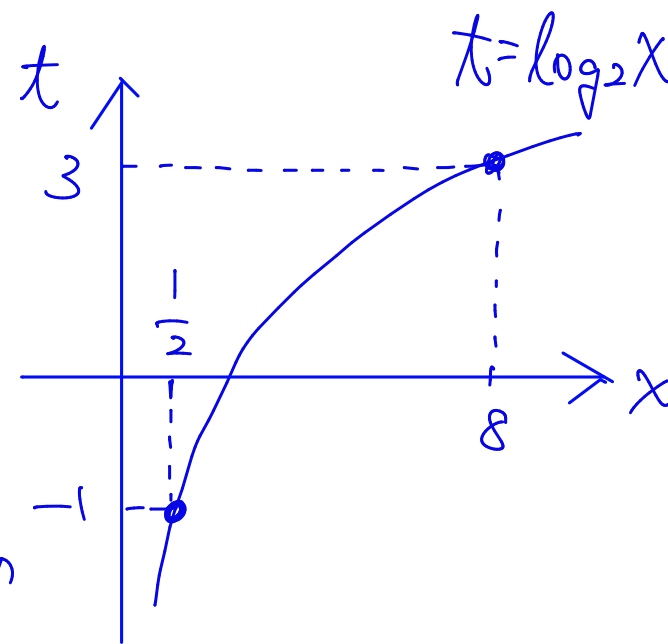
とりうる値の範囲に注意!

$\frac{1}{2} \leq X \leq 8$ のとき、 $t = \log_2 X$ のとりうる値の
範囲は $-1 \leq t \leq 3$ であり、このもとで

$y = -t^3 + 3at^2$ の最大値を求めよ。

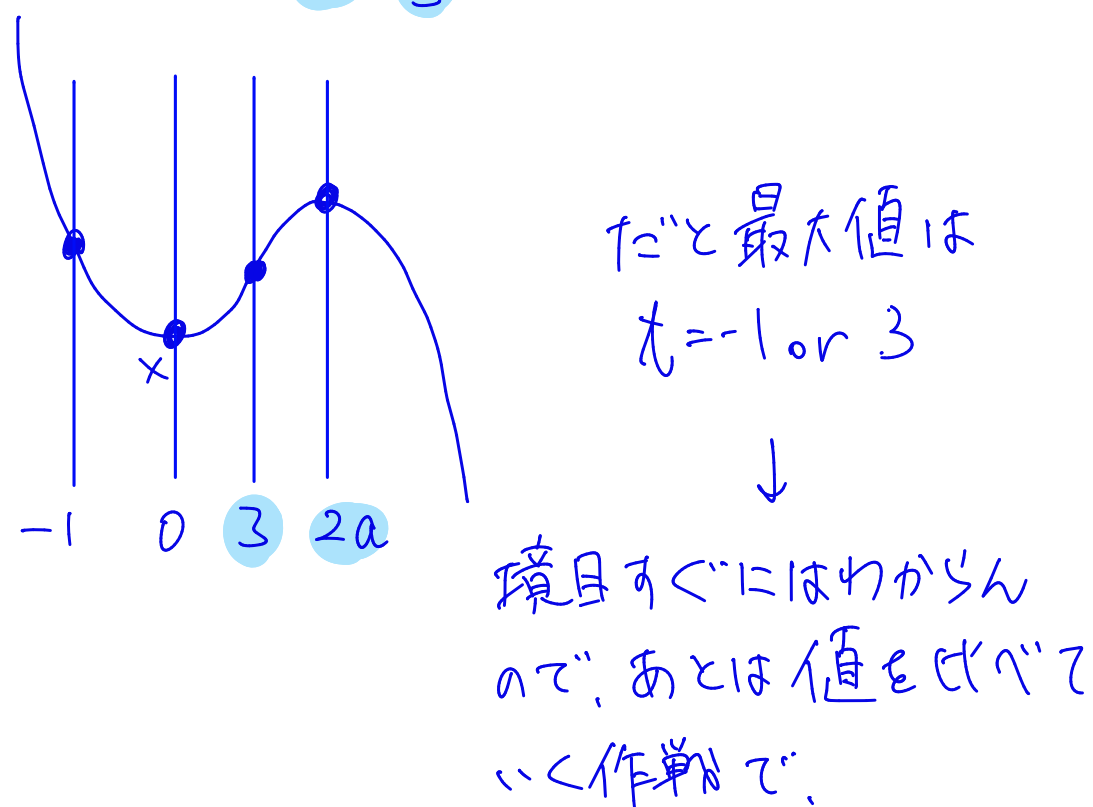
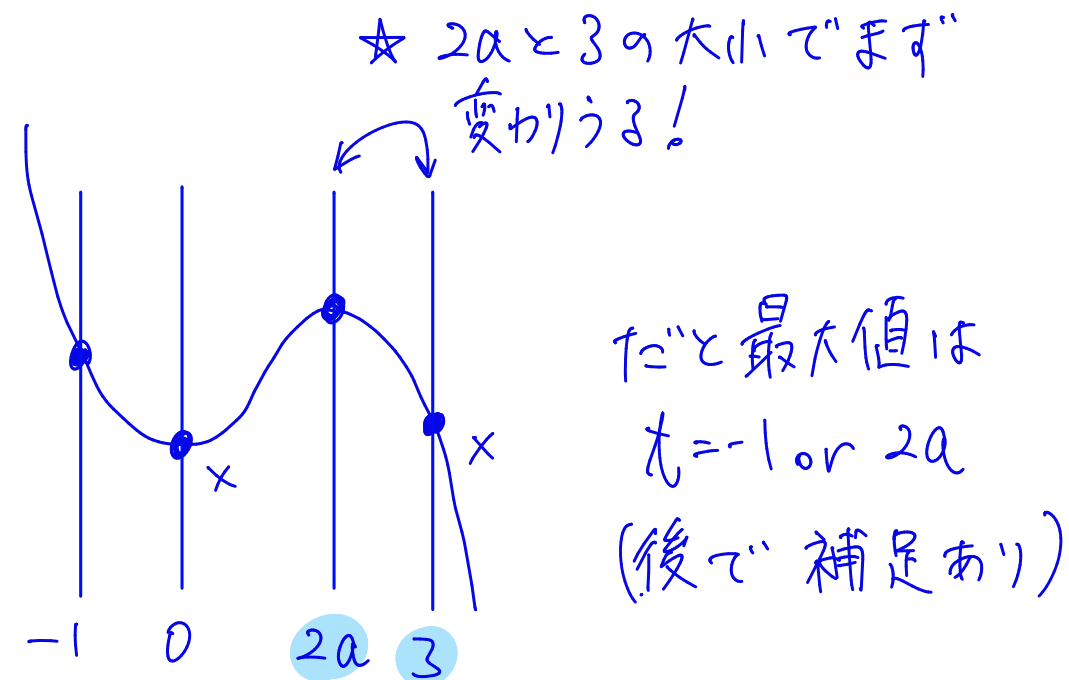
$$y' = -3t^2 + 6at$$

$$= -3t(t - 2a)$$



$a > 0$ がありがたいが、
定義域をふまえて
 a の値によって増減表の
様子が変わるので、

場合分け → 実験あるのみ!!



$$f(t) = -t^3 + 3at^2 \text{ とおく。}$$

(i) $2a \leq 3$ のとき、つまり $(0 <) a \leq \frac{3}{2}$ のとき、
最大値は $f(-1)$ と $f(2a)$ のうち小さい
方の値 である。

$$f(-1) = 3a + 1, \quad f(2a) = 4a^3 \text{ であり、}$$

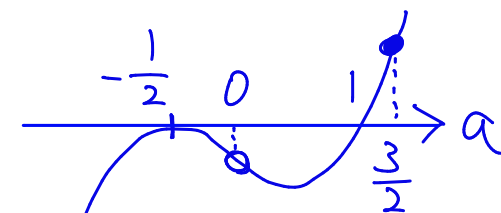
$$1 + 3a \geq 4a^3 \quad \leftarrow \text{便利な調べ方、}$$

$$\Leftrightarrow 4a^3 - 3a - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(4a^2+4a+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{(a-1)(2a+1)^2 \leq 0}$$

複号同順で変形



よ、最大値は

$$M = \begin{cases} 3a + 1 & (0 < a < 1) \\ 4a^3 & (1 \leq a \leq \frac{3}{2}) \end{cases}$$

← $a=1$ は
どちらでも

である。

(ii) $2a > 3$ のとき、つまり $a > \frac{3}{2}$ のとき。

最大値は $f(-1)$ と $f(3)$ のうち小さい方の値 である。

$f(-1) = 3a + 1$, $f(3) = 27a - 27$ であり、

$$3a + 1 \geq 27a - 27$$

$$\Leftrightarrow 24a - 28 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 6a - 7 \leq 0 \quad \text{おおよび}$$

$a > \frac{3}{2}$ のとき $6a - 7 > 0$ なのて

$f(-1) < f(3)$ となり、最大値は

$$M = 27a - 27 \quad (a > \frac{3}{2}) \quad \text{である。}$$

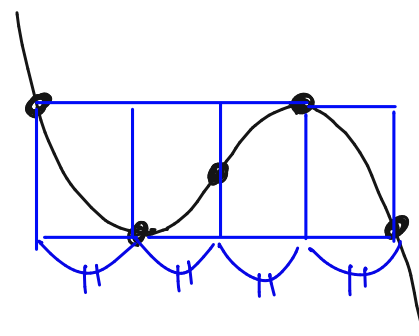
以上 (i)(ii) をまとめて。

$$M = \begin{cases} 3a + 1 & (0 < a < 1) \\ 4a^3 & (1 \leq a \leq \frac{3}{2}) \\ 27a - 27 & (a > \frac{3}{2}) \end{cases}$$

を得る。

↖ 等号はどこでも OK.

<補足> 3次関数の性質



となる!! 4等分.

も同様に

(証明あらず)

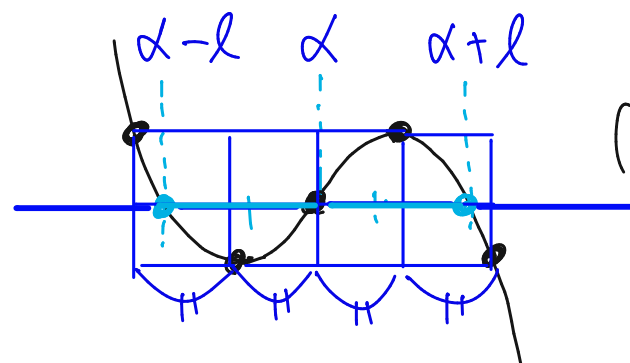
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) と $y = e$ の交点の x 座標は $ax^3 + bx^2 + cx + d - e = 0$ の解。

→ 解と係数の関係より 3解の和は $-\frac{b}{a}$

→ 変曲点に関する対称性より、

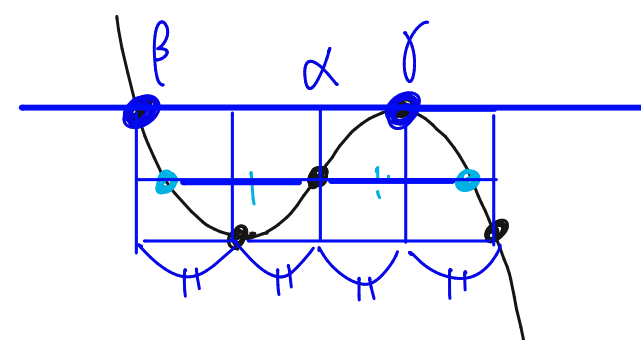
一定!!

その値は 変曲点の x の値の3倍



$$(\alpha-l) + \alpha + (\alpha+l) = \underline{\underline{3\alpha}}$$

よって.



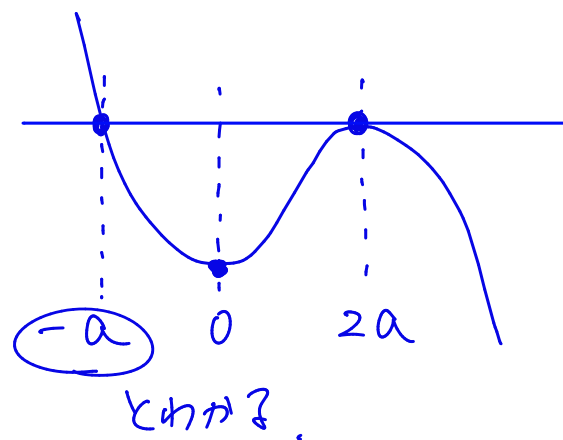
重解

$$\beta + 2\gamma = 3\alpha$$

$$\alpha - \beta = 2(\gamma - \alpha)$$

$$\therefore \alpha - \beta : \gamma - \alpha = \underline{\underline{2:1}}$$

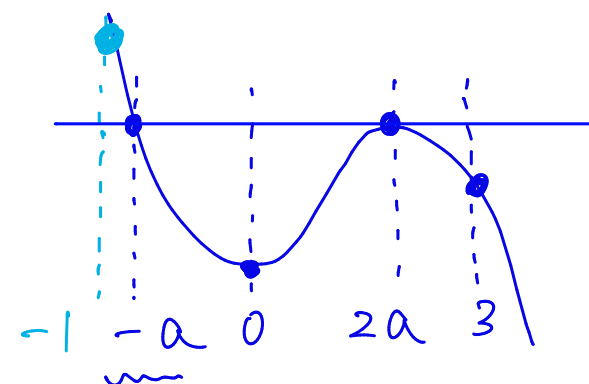
☆これを使うと、今回は



とわかる。

→ (i) の場合分けを細かくできる!

(i-1) $0 < a < 1$



(i-2) $1 \leq a < \frac{3}{2}$

