平面上の曲線①　放物線

以下の問いに答えよ。

(1) p を 0 ではない定数とする。平面上で、点 $F(p,\ 0)$ と直線 $x = -p$ からの距離が等しい点の軌跡 P を求めよ。

(2) 軌跡 P 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を求めよ。

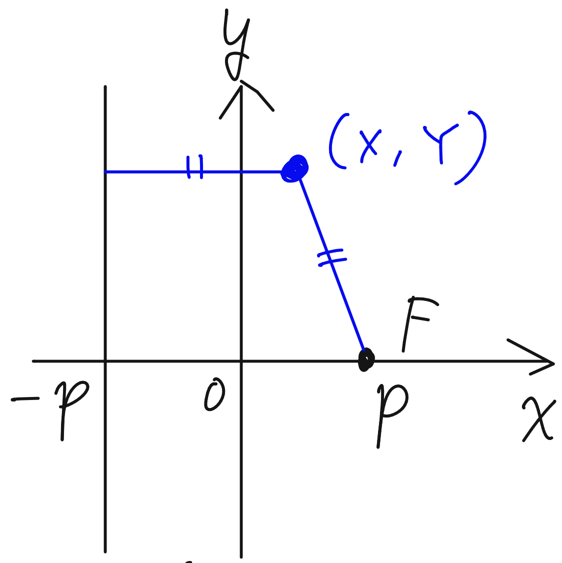
放物線

いつでも知識を取り出せるように。

式，接線，媒介変数表示，性質について

式

$F(p,0)$ と $x=-p$ からの距離が等しい点の軌跡の式．



(p>0としている)

この上の点を (X,Y) として，(X,Y) についての必要十分条件を求める．(良問 1A2B ⑰)

$F(p,0)$ と $x=-p$ から (X,Y) が等距離

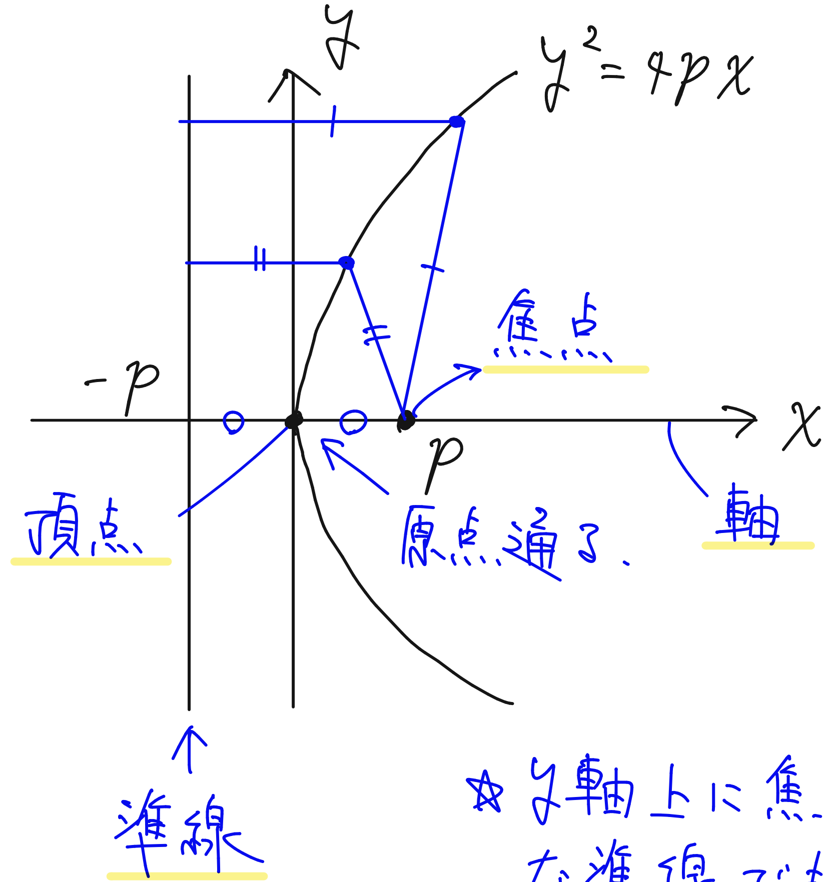
$\Leftrightarrow \sqrt{(X-p)^2+Y^2}=|X+p|$

$\Leftrightarrow (X-p)^2+Y^2=(X+p)^2$ 両辺2乗！

$\Leftrightarrow Y^2=4pX$ 軌跡の式

よって求める軌跡の方程式は $y^2=4px$

$p>0$ として図示すると，



☆ y軸上に焦点 & x軸平行な準線でも同様に同値変形で導ける．

接線

$y^2=4px$ の (x_0, y_0) での接線の式を求める。

<考え方①>

両辺 x で微分して

$$2y\frac{dy}{dx}=4p$$

合成関数の微分

$y_0 \neq 0$ とすると、

$(x, y)=(x_0, y_0)$ のとき

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2p}{y_0}$ となる。よって接線の式は、

$$y-y_0=\frac{2p}{y_0}(x-x_0)$$

$$\Leftrightarrow\ y_0y-y_0^2=2p(x-x_0) \quad \cdots ①$$

ここで (x_0, y_0) は放物線上ゆえ

$y_0^2=4px_0$. これを①に代入して、

$$y_0y=2p(x+x_0)$$

を得る。

$y_0=0$ のとき接線は $x=0$ となり、これも上の式に含まれる。($x_0=0$, $p\neq 0$ より)

思い出すイメージ

$$y^2=4px$$
$$=2p(x+x)$$

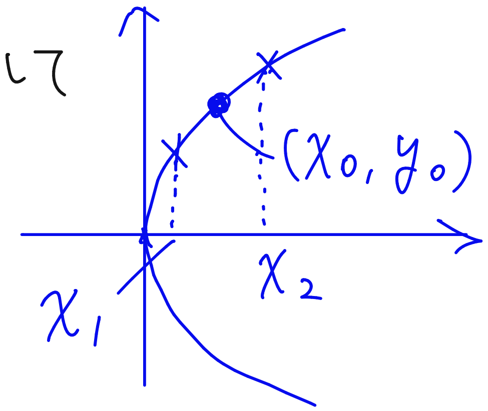
1つをy_0に　　1つをx_0に

→ $y_0y=2p(x+x_0)$ となる.

〈考え方②〉

$x_0 \neq 0$ とすると、放物線上に (x_0, y_0) に十分近い2点 $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ をとり、
$x_1 < x_0 < x_2$、y_1 と y_2 は y_0 と同符号
とできる。

このとき放物線の式に代入して



$$\begin{cases} y_1^2 = 4px_1 \\ y_2^2 = 4px_2 \end{cases}$$

辺々引いて

$$(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 4p(x_1 - x_2)$$

$x_1 - x_2 \neq 0$ かつ $y_1 + y_2 \neq 0$ より ←why?

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4p}{y_1 + y_2}$$ を得る。

2点を通る直線の平均変化率
→ 2点を近付けていくと接線の傾き。

ここで、$(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ を共に (x_0, y_0) に限りなく近付けていくと、

値は $\dfrac{4p}{y_0 + y_0} = \dfrac{2p}{y_0}$ に近付き、

これが (x_0, y_0) での接線の傾きになる。

よって接線の式は …

(以下考え方①と同じ。$x_0 = 0$ のときも含むことを確認)

媒介変数表示(の1つ) → 1文字で表せる!!

$y^2 = 4px \ (p \neq 0)$ 上の点は

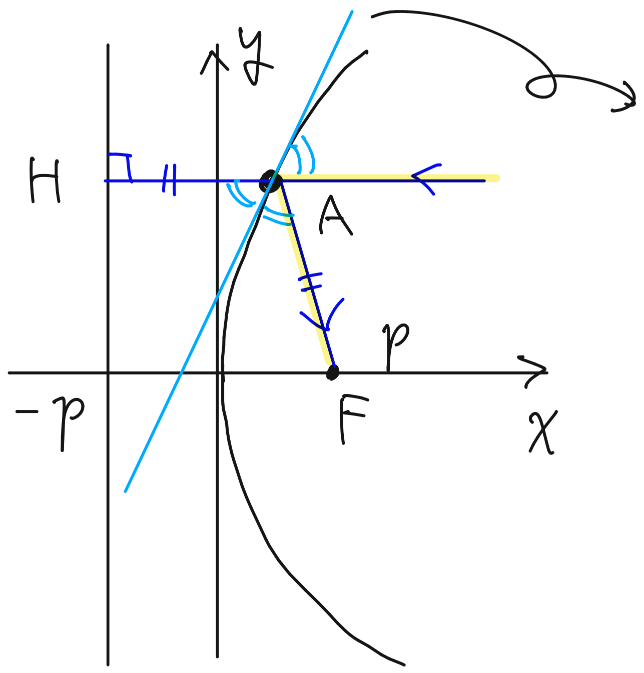
$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{4p} \\ y = t \end{cases}$$

を満たす実数 t と 1対1に対応する

実数全体をとる。

☆ $x = t$ とおくと y が2つになってしまう。

＜放物線の性質＞



任意の点Aで、
接線が、∠HAFを
二等分する。…☆

↓

軸に平行に入って
きた電波は、
放物線で反射して
焦点に集まる！

→$\underbrace{\text{パラボラ}}_{\text{放物線}}$アンテナ

逆に言うと、
焦点から発した電波を
まとめて同じ方へとばせる。

☆の証明 ($p>0$とする)

$A\left(\frac{a^2}{4p}, a\right)$ $(a\in\mathbb{R})$ とおくと、

接線の式は

$$ay = 2p\left(x+\frac{a^2}{4p}\right).$$

この接線とx軸との交点をBとおくと、
Bのx座標は $-\frac{a^2}{4p}$ となる。

ここで、

$$AF^2 = \left(p-\frac{a^2}{4p}\right)^2 + a^2$$
$$= \frac{a^4}{16p^2} + \frac{a^2}{2p} + p^2$$
$$= \left(p+\frac{a^2}{4p}\right)^2$$

$BF^2 = \left(p+\frac{a^2}{4p}\right)^2$ より、$AF=BF$

よって $\angle FAB = \angle FBA$.

錯角より $\angle FBA = \angle HAB$

$\therefore \angle FAB = \angle HAB$