九州大学 2023 文系第2問

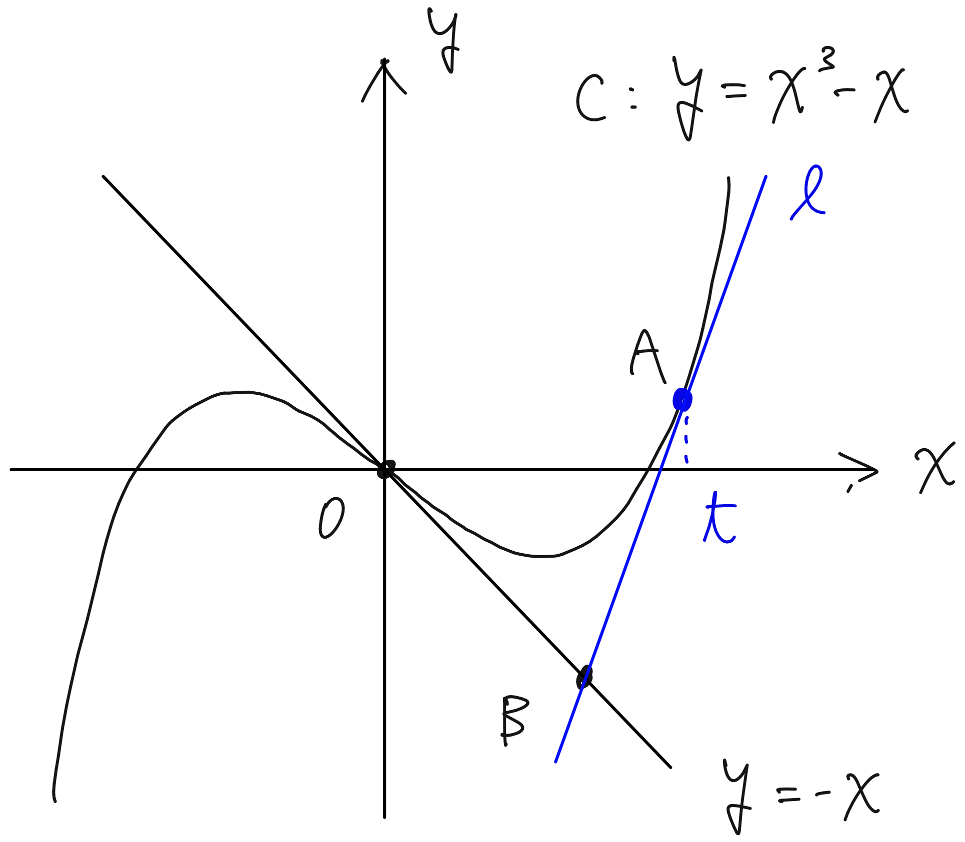
xy 平面上の曲線 $C : y = x^3 - x$ を考える。実数 $t > 0$ に対して、曲線 C 上の点 $A(t,\ t^3 - t)$ における接線を l とする。直線 l と直線 $y = -x$ の交点を B、三角形 OAB の外接円の中心を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 B の座標を t を用いて表せ。

(2) $\theta = \angle OBA$ とする。$\sin^2\theta$ を t を用いて表せ。

(3) $f(t) = \dfrac{OP}{OA}$ とする。$t > 0$ のとき、$f(t)$ を最小にする t の値と $f(t)$ の最小値を求めよ。

☆まずはグラフが書けるときは書く！



※ $y=x^3-x$
$=x(x^2-1)$
$=x(x+1)(x-1)$ に気付くとすぐ書ける

※ $y'=3x^2-1$ より、$x=0$ で傾き -1

(1) 直線の式も求められるので、連立する。

$y'=3x^2-1$ より、ℓ の式は

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$$

$$y=(3t^2-1)x-2t^3$$ となるので、

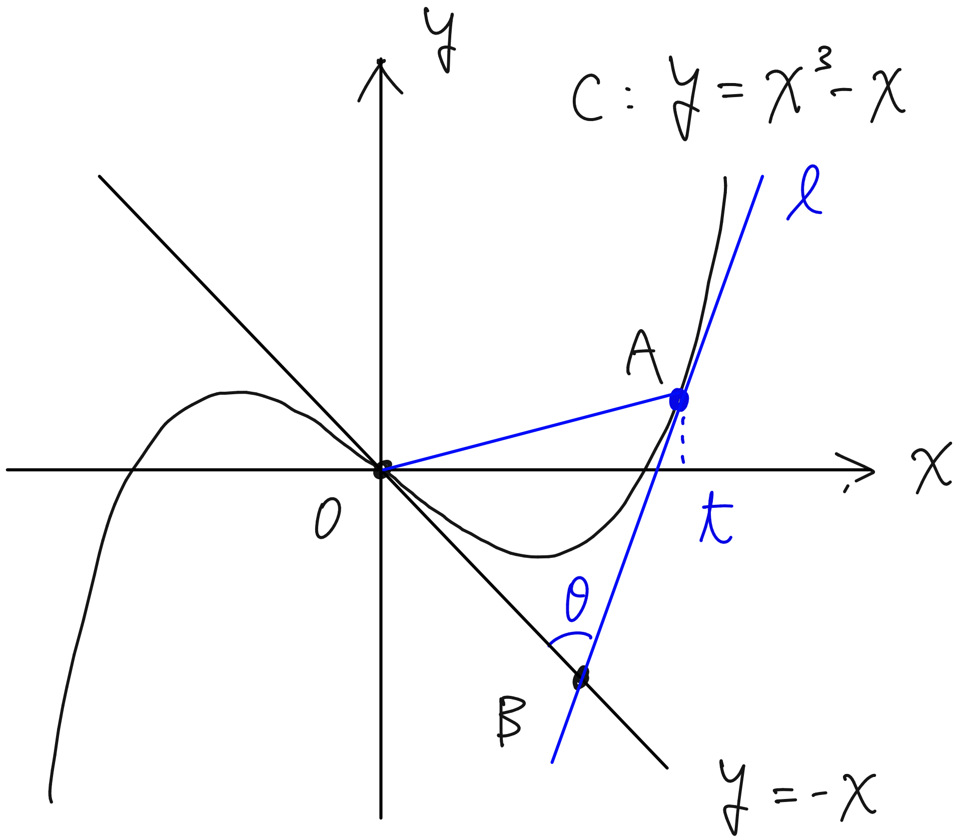
$y=-x$ と連立して解くと、

$$(3t^2-1)x-2t^3=-x$$
$$3t^2x=2t^3$$
$$x=\frac{2}{3}t \quad (\because t\neq 0)$$

となり、Bの座標は $\left(\frac{2}{3}t,\ -\frac{2}{3}t\right)$ と求められる。

グラフ的にもそれっぽい！

(2)



図形情報 → 幾何? 座標? ベクトル?

いまわかっているのは3点の座標

→ 辺の長さは全て求められるので、

余弦定理で $\cos\theta$ は求められる.

→ 内積からでも求められる.

こっちの方がラクそう? (後ほど)

$$\overrightarrow{BO} = \left(-\frac{2}{3}t,\ \frac{2}{3}t\right)$$

$$\overrightarrow{BA} = \left(\frac{1}{3}t,\ t^3 - \frac{1}{3}t\right)$$ より、

$$\cos^2\theta = \left(\frac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BO}||\overrightarrow{BA}|}\right)^2$$

$$= \frac{\left(\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}\right)^2}{|\overrightarrow{BO}|^2|\overrightarrow{BA}|^2}$$

$$= \frac{\left(-\frac{2}{9}t^2 + \frac{2}{3}t\left(t^3 - \frac{1}{3}t\right)\right)^2}{\frac{8}{9}t^2\left(\frac{1}{9}t^2 + \left(t^3 - \frac{1}{3}t\right)^2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}t^4 - \frac{4}{9}t^2\right)^2}{\frac{8}{9}t^2\left(t^6 - \frac{2}{3}t^4 + \frac{2}{9}t^2\right)}$$

$$= \frac{\frac{4}{\cancel{81}}\cancel{t^4}(3t^2-2)^2}{2\ \frac{8}{\cancel{81}}\cancel{t^4}(9t^4-6t^2+2)}$$

$$= \frac{9t^4-12t^2+4}{18t^4-12t^2+4}$$ と求められるので、

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$$

$$= 1-\frac{9t^4-12t^2+4}{18t^4-12t^2+4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{9t^4}{18t^4-12t^2+4}}}$$ を得る。

余弦定理でいってもあまり変わらない…

<別解>

$OA^2 = \cdots = t^6-2t^4+2t^2$

$OB^2 = \cdots = \frac{8}{9}t^2$

$AB^2 = \cdots = t^6-\frac{2}{3}t^4+\frac{2}{9}t^2$ より、

$\triangle OAB$で余弦定理を用いると、

$$\cos^2\theta = \frac{(OB^2+AB^2-OA^2)^2}{4\cdot OB^2\cdot AB^2}$$

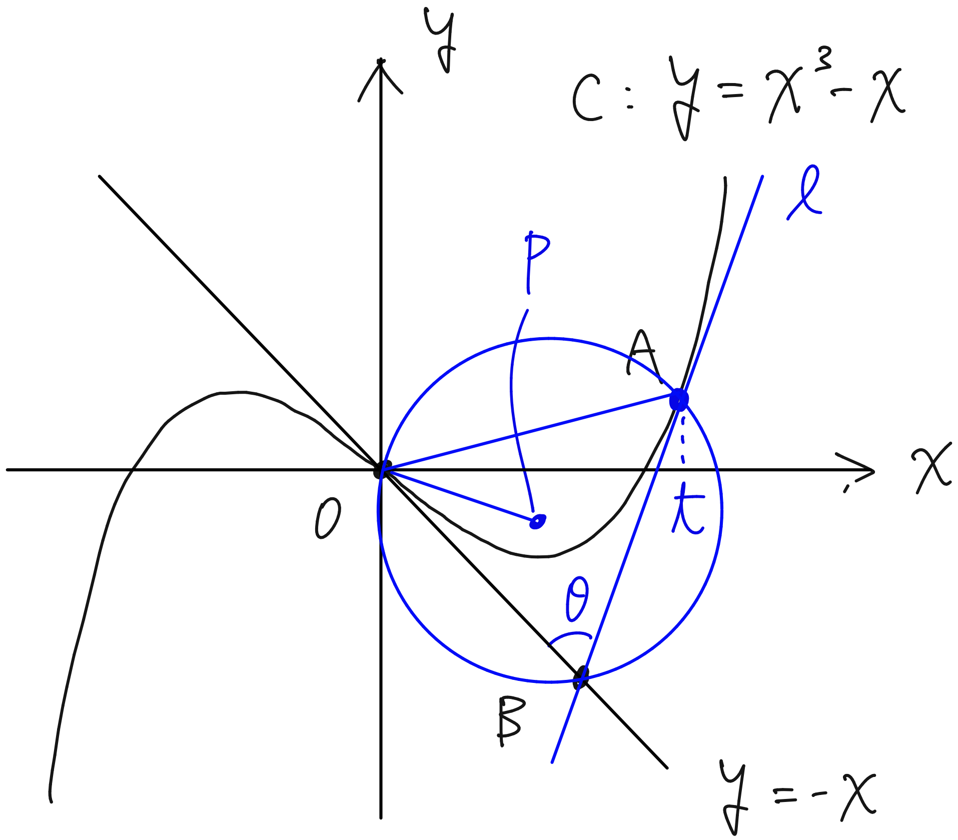
$$= \frac{\left(\frac{8}{9}t^2+t^6-\frac{2}{3}t^4+\frac{2}{9}t^2-(t^6-2t^4+2t^2)\right)^2}{4\cdot\frac{8}{9}t^2\cdot\left(t^6-\frac{2}{3}t^4+\frac{2}{9}t^2\right)}$$

$\cdots$

ここが大変

$$= \frac{9t^4-12t^2+4}{18t^4-12t^2+4}$$ となって以下同様

(3)



OPは外接円の半径！
→ 正弦定理がピンとくる.

△OABで正弦定理を用いると

$$\frac{OA}{\sin\theta} = 2OP$$ を得るので、

$$f(t) = \frac{OP}{OA} = \frac{1}{2\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{9t^4}{18t^4 - 12t^2 + 4}}}$$

$$= \sqrt{\frac{9t^4 - 6t^2 + 2}{18t^4}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{18}\left(\frac{2}{t^4} - \frac{6}{t^2} + 9\right)}$$

慣れなければ $\frac{1}{t^2} = T$ などと置換すれば二次関数に！

$$= \sqrt{\frac{1}{18}\left(2\left(\frac{1}{t^2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}\right)}$$ より、

$\frac{1}{t^2} = \frac{3}{2}$、つまり $t = \frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$ をとる。