数学Ⅲ特講

良問演習

## 複素数平面・式の処理③　極形式

$\cos 72^\circ$ を以下の方法で求めよ。

(1) $z^5 = 1$ を満たす複素数 $z$ を全て求めよ。

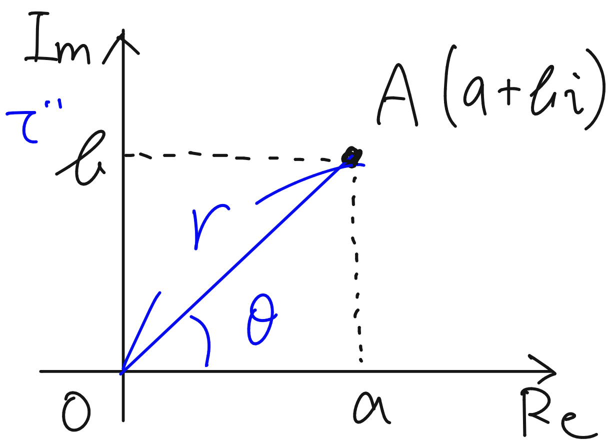
(2) $\omega = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ とおくとき、$\omega$ は
$\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$ を満たすことを示せ。

(3) $\cos 72^\circ$ を求めよ。

<おまけ>　$\cos 72^\circ$ の他の求め方を考えてみましょう。

# 極形式

複素数平面上で、複素数 $z=a+bi$ が表す点をAとする。
平面上でのAの表し方として、$(a, b)$ の他に、原点からの距離 $r$ と、実軸正の部分からの回転角 $\theta$ を使って表すことができる。




☆平面上の点は全てこれで表すことができるが、$\theta$ は一意には定まらない

- $\theta$ には $+2n\pi$ 分の自由度がある
- 原点は $r=0$, $\theta$ は任意

このとき、$a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$ より

$$z=a+bi$$
$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と表され、これを複素数 $z$ の極形式という。

※ $\sin\theta i$ だと $\sin(\theta i)$ とまぎらわしいので $i$ は前に書くことが多い。

$\theta$ のことを $z$ の偏角といい、$\theta=\arg(z)$ で表す。

カッコなくてもOK

☆ $\theta$ の決め方に自由度があるので、$\arg(z)$ は基本的に1つに定まらない！

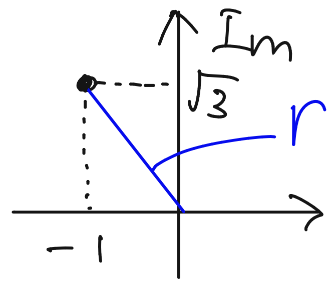
☆ $r=|z|$ で $r$ は一意に決定される。

ex) $z=-1+\sqrt{3}i$

$$=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}$

$$=2\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi+2n\pi\right)\right)$$



極形式の何が嬉しい？

→ $z=a+bi$ の形ではそんなにキレイじゃなかった積と商が、キレイな性質を持ってくる。(式でも平面でも)

| 極形式の複素数の積と商 |
|---|

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2) \\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{cases}$$ とおくと、

$$z_1 z_2 = \underline{r_1 r_2}\left(\cos(\underline{\theta_1+\theta_2}) + i\sin(\underline{\theta_1+\theta_2})\right)$$

和でOK！

☆証明は各自で！(加法定理)

→ またキレイな極形式で表せる。

つまり、$\begin{cases} |z_1 z_2| = r_1 r_2 \\ \arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$ ←和でOK.

※$2n\pi$分のズレはここでは考えてない

考えると $\theta_1 + \theta_2 + 2n\pi$

これを繰り返すと、

$$z_1^n = r_1^n(\underline{\cos n\theta_1 + i\sin n\theta_1})$$ となる。

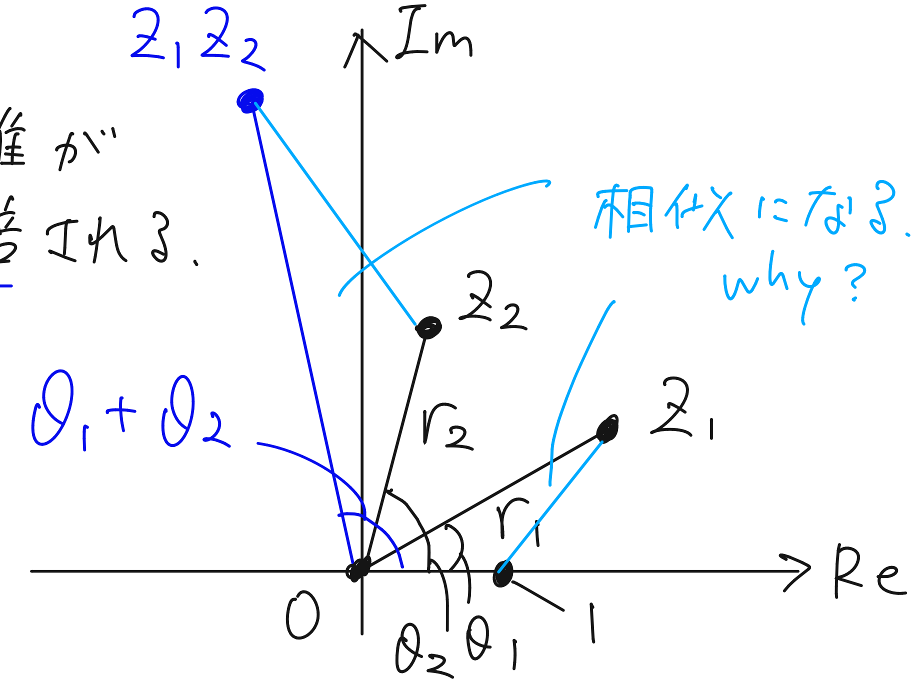
$\theta_1$をn回足す

$$= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)^n \quad (n:\text{自然数})$$

これをド・モアブルの定理という。

☆複素数のn乗は極形式が考えやすい！

平面上のイメージは、$z_1$が、$\arg(z_2) = \theta_2$ だけ回転して、原点からの距離が $|z_2| = r_2$ 倍される。



商も同様に、$z_2 \neq 0$として

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2}\cdot\frac{1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}$$
$$= \frac{1}{r_2}(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$$
$$= \frac{1}{r_2}(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2))$$

と考えれば、積と同様に考えられて、$\left(z_1\cdot\frac{1}{z_2}\right)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \underline{\frac{r_1}{r_2}}(\cos(\underline{\theta_1-\theta_2}) + i\sin(\underline{\theta_1-\theta_2}))$$

差でOK！

つまり、
$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{r_1}{r_2} \\ \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$ ← 差でOK.

※ $2n\pi$分のズレを考えると $\theta_1 - \theta_2 + 2n\pi$

☆これを使うと、ド・モアブルの定理は全ての整数$n$で成り立つことがわかる。

$\boxed{n乗根}$ → 式でも平面でも理解を！

複素数$z$に関する方程式

$$z^n = \alpha$$

の解は、極形式を使うと求めやすくなる。

※ $z = a + bi$とおいていると計算が大変

例) $z^3 = i$を解く。　1周だけで十分.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$

とおくと、方程式は

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

☆ド・モアブル　☆両辺を極形式に.

※右辺を$i$のままで、相等条件でいってもいいが、

「$z_1$と$z_2$が$0$でないとき、

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$ かつ $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$」

を使うと処理がかんたんでラク.　なぜ？

$$\iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi \quad (\because 0 \leqq \theta < 2\pi) \end{cases}$$

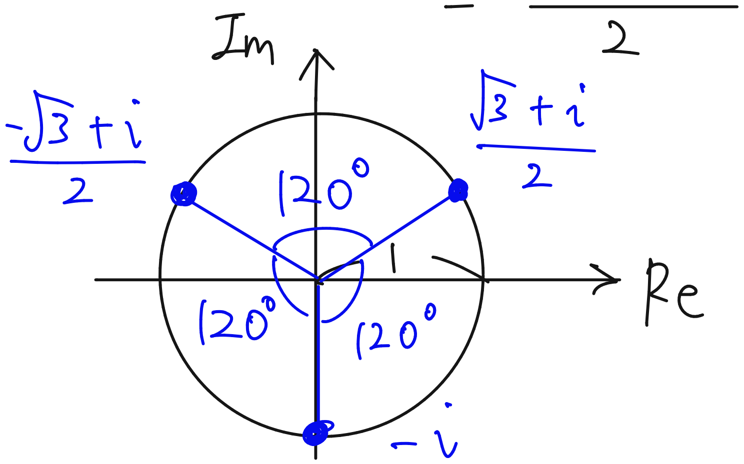
$$\iff \begin{cases} r = 1 \quad (\because r\text{は}0\text{以上の実数}) \\ \theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi \end{cases}$$

よって $z = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6},$

$\cos\dfrac{5}{6}\pi + i\sin\dfrac{5}{6}\pi,$

$\cos\dfrac{3}{2}\pi + i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

$= \dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2},\ -i$ //




☆このように、$z^n = \alpha$ の解は、複素数平面上で表すと、半径 $|\alpha|^{\frac{1}{n}}$ の円周を $n$ 等分する形で現れる！

## $\boxed{\text{解説}}$

(1) 先ほどと同じ流れなのでサクッと。

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$

とおくと、方程式は

$r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$

$$\iff \begin{cases} r^5 = 1 \\ 5\theta = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ 8\pi \quad (\because 0 \leqq \theta < 2\pi) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = 1 \quad (\because r\text{は}0\text{以上の実数}) \\ \theta = 0,\ \dfrac{2}{5}\pi,\ \dfrac{4}{5}\pi,\ \dfrac{6}{5}\pi,\ \dfrac{8}{5}\pi \end{cases}$$

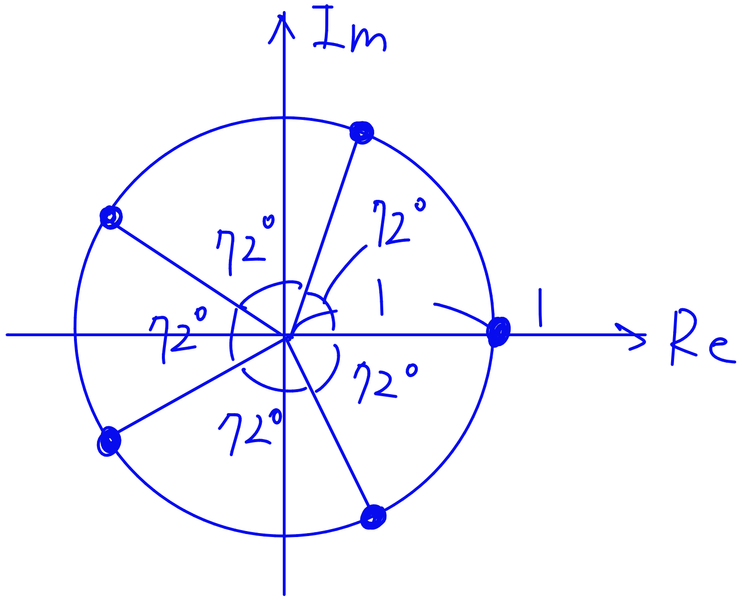
よって、$z=1,\ \cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi,$

$\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi,$

$\cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi,$

$\cos\frac{8}{5}\pi + i\sin\frac{8}{5}\pi$ //

複素数平面上では、




となる。

$z^5=1$ ← 実数係数なので、共役な複素数（つまり実軸対称）も解になる。
平面上でも確認！

(2) 代入するのはメンドくさい。(1)を利用。

(1)より、

$w = \cos\overset{72^\circ}{\frac{2}{5}\pi} + i\sin\frac{2}{5}\pi$ は

$z^5=1$ の解なので、

$w^5=1$ を満たす。

$w^5-1=0$ とても重要！

$\iff (w-1)(\underbrace{w^4+w^3+w^2+w+1}_{\text{出てきた！}})=0$

ここで、$w \neq 1$ なので、

$w^4+w^3+w^2+w+1=0$ が成立。

(3) $\cos 72^\circ$ は $\mathrm{Re}(w)$ なので、

$w$を別途求めるか、$w+\underbrace{\bar{w}}_{\text{あとで考察}}$ の情報がわかれば求まる。

→ $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ を解く。

→ これは相反方程式であり、
コツは別動画で解説してます.

$z^4+z^3+z^2+z+1=0$　その1つが $w$

→ (1) の $z=1$ 以外の 4つが解となる.

$z \neq 0$ より $z^2$ で両辺割って.

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0$$

ここで, $\alpha=z+\frac{1}{z}$ とおくと.

$\alpha^2+\alpha-1=0$ となる → 2次方程式

これを解いて $\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ …☆

よって, $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$$\Leftrightarrow z^2-\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}z+1=0 \quad (\because z\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-4}}{2} \text{ or } \frac{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^2-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i}{4} \text{ or } \frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i}{4}$$

ここで, この4つと (1) の $z=1$ 以外の4つの解が対応するので, 実部, 虚部の符号を考えると,

$$w=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i}{4}$$

となるので、複素数の相等条件より

$$\cos 72^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

※実は $\bar{w} = \frac{1}{w}$ …(*) となるので、

$$\mathrm{Re}(w) = \frac{1}{2}(w+\bar{w}) = \frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$$

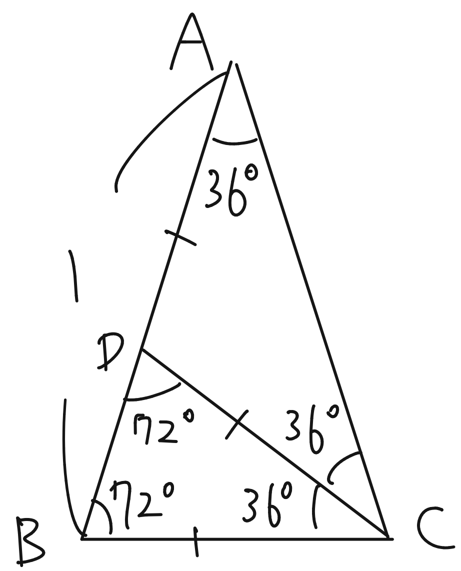
より、☆から すぐに求まる。

(*)は、$|w| = 1$ より ← $z^5 = 1$ の解より

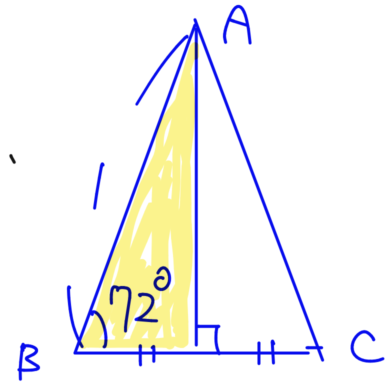
$|w|^2 = 1 \iff w\bar{w} = 1 \iff \bar{w} = \frac{1}{w}$ と示される。

$\boxed{\text{おまけ}}$

cos72°の初等幾何的な求め方




BCの長さの半分を求めれば、
それがcos72°になる。




BC = $x$ とおくと、

△ABC ∽ △CDB より、AB : BC = CD : DB

つまり、$1 : x = x : 1-x$

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$x > 0$ より $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって、$\cos 72^\circ = \dfrac{x}{2}$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$