複素数平面・図形への応用⑦　東北大学 2018 理系第5問

α を複素数とする。複素数 z の方程式 $z^2 - \alpha z + 2i = 0$ …①
について、以下の問いに答えよ。ただし、i は虚数単位である。

(1) 方程式①が実数解をもつように α が動くとき、点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

(2) 方程式①が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき、点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

ポイント　2次方程式の解の配置
（実数係数のケースは良問②）

複素数解の問題は、解をおいて、
そこから解と係数の関係や直接代入
によって係数の条件を立式していく
ことが多い。（グラフも書けないし、
解の公式も遠回りなので）

解説　立式→処理の流れをしっかりと。

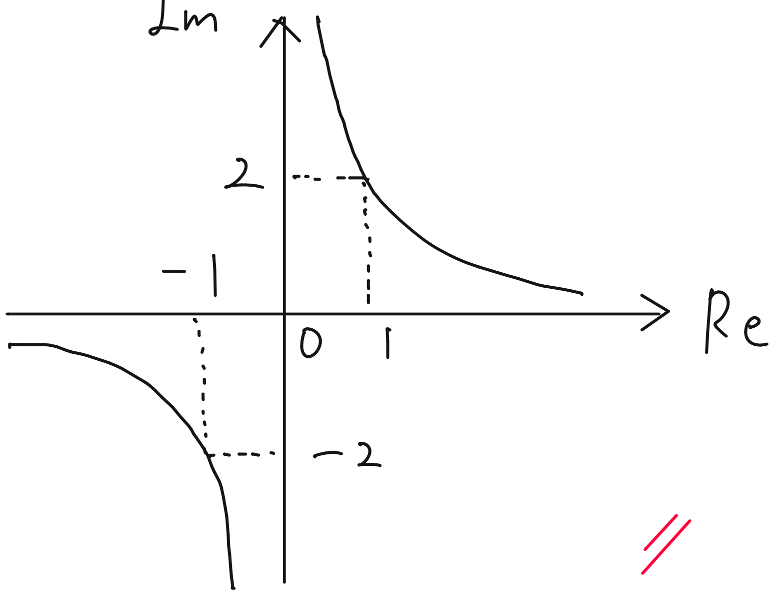
(1) 実数解をおいて代入 ← 1つでもあればOK
求める条件は、kを実数として、
$$k^2-\alpha k+2i=0 \quad \cdots ②$$
を満たすkが存在するようなαの
必要十分条件である。

$k=0$とすると②は成り立たないので、
$k\neq 0$として考える。このとき
$$② \iff \alpha=k+\frac{2i}{k}$$

→ αのままだと考えにくいので
$\alpha=x+yi$として実数の
世界で考える。

ここで$\alpha=x+yi$ $(x, y\in\mathbb{R})$とおくと、
$k\in\mathbb{R}$と複素数の相等条件から
$$\begin{cases} x=k \\ y=\dfrac{2}{k} \end{cases}$$
これを満たす実数kが存在する
ための(x, y)の必要十分条件は
$$y=\frac{2}{x}$$
であるので、

点α つまり点 $x+yi$ が複素数平面上に描く図形は、以下の双曲線となる。



(2) 絶対値1の複素数解を $\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと、 ←これで必要十分

求める条件は、

$$\begin{cases} 0\leqq\theta<2\pi \\ (\cos\theta+i\sin\theta)^2-\alpha(\cos\theta+i\sin\theta)+2i=0 \quad \cdots ③ \\ \beta=\alpha\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad \cdots ④ \end{cases}$$

を満たす、θ と α が存在する …☆

ようなβについての必要十分条件である。

α を消去して θ と β の式に。

$\cos\theta+i\sin\theta\neq 0$ より、

$$③ \Longleftrightarrow \alpha=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^2+2i}{\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha=\cos\theta+i\sin\theta+2i(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$\Longleftrightarrow \alpha=(\cos\theta+2\sin\theta)+i(2\cos\theta+\sin\theta)$$

これを④に代入すると、

$$☆ \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta=\{(\cos\theta+2\sin\theta)+i(2\cos\theta+\sin\theta)\} \\ \quad\times\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad \cdots ⑤ \quad \text{を満たす} \\ \theta\ (0\leqq\theta<2\pi) \text{ が存在} \quad \cdots ☆☆ \end{cases}$$

⑤ $\Leftrightarrow$ $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underline{-\cos\theta + \sin\theta} + 3\left(\underline{\cos\theta + \sin\theta}\right)i\right)$

cosで合成　　sinで合成

$= -\cos\left(\underline{\theta + \frac{\pi}{4}}\right) + 3\sin\left(\underline{\theta + \frac{\pi}{4}}\right)i$

位相がそろう！

楕円の香りがしてくる。

※思いつかなければ、この時点で

$\beta = s + t i$ として議論

$\begin{cases} s = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta + \sin\theta) \\ t = \frac{3}{\sqrt{2}}(\cos\theta + \sin\theta) \\ 0 \leqq \theta < 2\pi \end{cases}$ をみたす θ が存在

連立

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = (s, t\text{の式}) \\ \sin\theta = (s, t\text{の式}) \\ 0 \leqq \theta < 2\pi \end{cases}$ 〃

$\Leftrightarrow$ 2乗の和が1　　でもちろん求められる。

ここで $\beta = s + t i$ $(s, t \in \mathbb{R})$ とおくと、

☆☆ $\Leftrightarrow \begin{cases} s = -\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\ t = 3\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \leqq \theta < 2\pi \end{cases}$ をみたす θ が存在

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -s \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}t \\ \frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi \end{cases}$ をみたす θ が存在

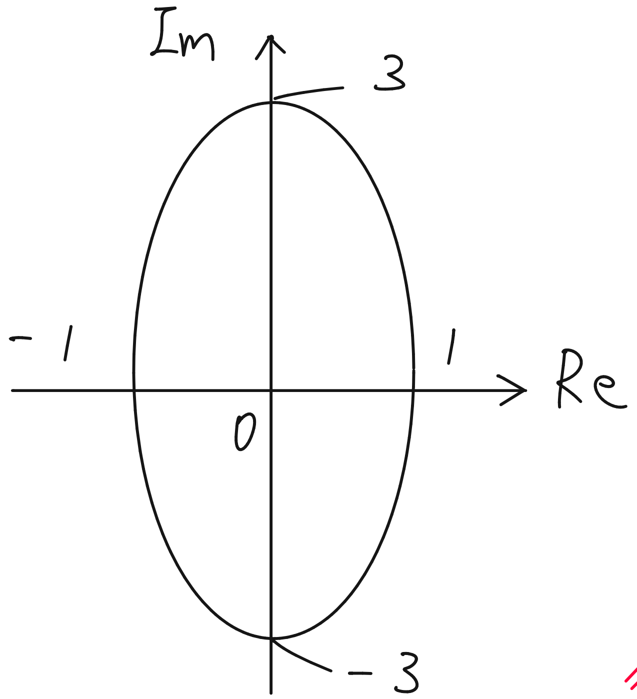
why?

$\Leftrightarrow (-s)^2 + \left(\frac{1}{3}t\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow s^2 + \frac{1}{9}t^2 = 1$　βについての必要十分条件。

を得る。

よって、点βつまり点 s+ti が複素数平面上に描く図形は、以下の楕円となる。

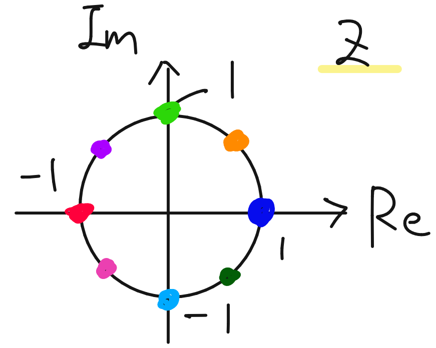


おまけの補足　点 α がナナメ楕円を描くイメージ

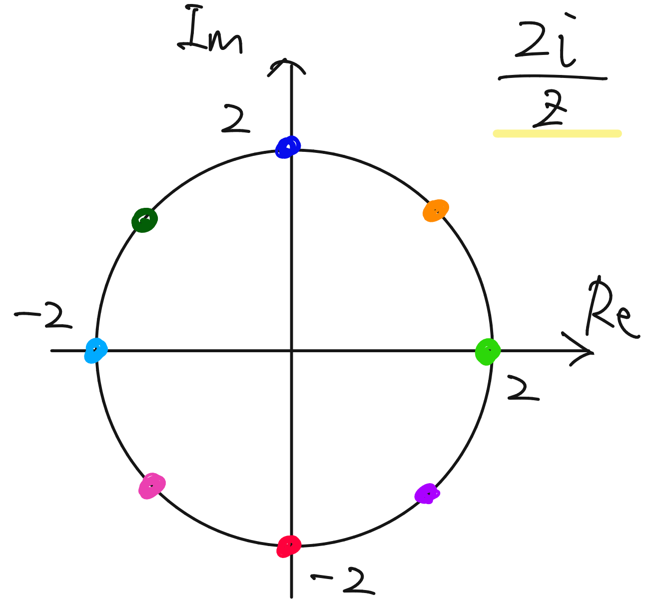
$$\alpha = \underline{z + \frac{2i}{z}}$$

代表点で動きを追う。

z



$\frac{2i}{z}$



反転では動かず、
実軸対称 + 90°回転 + 2倍拡大

足すと、$\alpha = z + \frac{2i}{z}$ は確かに斜め楕円になりそう。

(半長軸，半短軸の長さもわかる)