積分・不等式/面積/媒介変数⑨　名古屋大学 2020 理系第3問

数学Ⅲ特講
過去問

以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は、区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち、$f''(x) > 0$ をみたしているとする。区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で関数 $F(x)$ を

$$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)$$

と定義するとき、区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $F(x) \geqq 0$ であることを示せ。

(2) $f(x)$ を (1) の関数とするとき、$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \geqq 0$ を示せ。

(3) 関数 $g(x)$ は、区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で導関数 $g'(x)$ をもち $g'(x) < 0$ をみたしているとする。このとき、$\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \geqq 0$ を示せ。

一般的な関数についての考察問題
→ 与えられた条件以外の条件を、勝手に生み出さないこと!

(1) どうすれば示されるかを考えていく.
f''の条件があるので、微分は使えそう.
$F(x)$の増減を調べよう.
(微分法の範囲でよくやる不等式の扱い方)

$$F(x)=f(x)-f(\pi-x)-f(\pi+x)+f(2\pi-x)$$

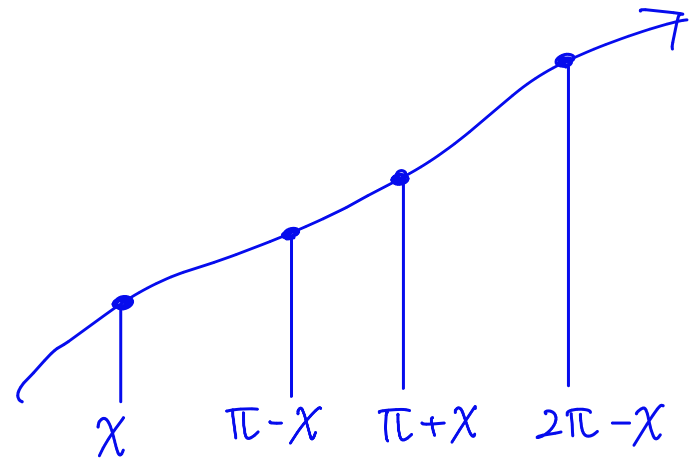
これは $\underline{0\leqq x\leqq\pi}$ の範囲で導関数を持ち,

$$F'(x)=f'(x)+f'(\pi-x)-f'(\pi+x)-f'(2\pi-x)$$

→ この正負を知りたい.

ここで、$0\leqq x\leqq 2\pi$ で $f''(x)>0$ より,
この範囲で $\underline{f'(x)\text{は狭義単調増加}}$。

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき、



→ $F'(x)$の正負わかる!

よって、$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

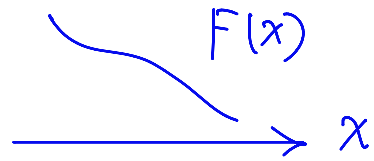
$$\begin{cases} f'(x)<f'(\pi+x) \\ f'(\pi-x)<f'(2\pi-x) \end{cases}$$

→ 違う組合せもアリ.

なので、

$$F'(x)=\underline{f'(x)}+\underline{f'(\pi-x)}\underline{-f'(\pi+x)}\underline{-f'(2\pi-x)}$$
$$<0$$

となり、$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で $F(x)$ は狭義単調減少。



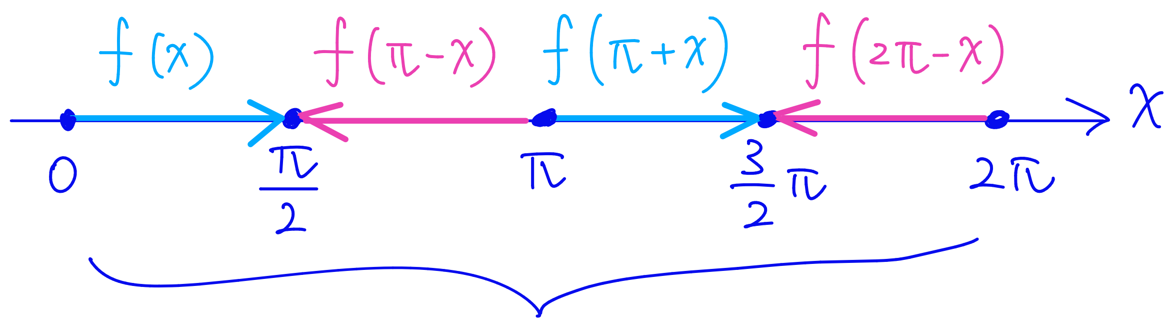
→ あとは何が必要?

いま $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{3}{2}\pi\right)+f\left(\frac{3}{2}\pi\right)$

$=0$ より、

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で $F(x)\geqq 0$ であることが示された。

(2) $f(x)$ は具体的にはわからないので、
定積分を求めることはできない。
$f(x)$ の性質からどう示すか？
$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で (1) を示したことがヒント.



0〜2π まで網羅している!

$\cos(\pi-x)=-\cos x$ などにも注目!

(1)より $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で $F(x)\geqq 0$.
さらに $\cos x\geqq 0$ も成り立つので、

良問演習① より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\,dx\geqq 0 \quad\cdots ①$$ が成立。

この左辺について、展開すると、

合わせにいく

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-x)\cos x\,dx}_{②}$$
$$-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi+x)\cos x\,dx}_{③}+\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi-x)\cos x\,dx}_{④}$$

となる。

② について、$a=\pi-x$ とおくと、

$$② = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(a)(-\cos a)(-da) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \underline{f(x)\cos x}\,dx$$

③について、$b = \pi + x$ とおくと

$$③ = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(b)(-\cos b)\,db = -\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \underline{f(x)\cos x}\,dx$$

④について、$c = 2\pi - x$ とおくと、

$$④ = \int_{2\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(c)\cos c\,(-dc) = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \underline{f(x)\cos x}\,dx$$

となるので、①の左辺は $\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$ と変形できる。よって ← 連結!

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \geqq 0$$ が示された。

(3) 新しい関数だけど(1)(2)が使えそう…
F(x)と似たようなものを作ってあげて、
同じ流れで示すか…(あとで別解も)

ゴールから逆算していくと、

$$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin x \\ \sin(x - \pi) = -\sin x \\ \sin(2\pi - x) = -\sin x \end{cases}$$ という符号なので、

$G(x) = g(x) + g(\pi - x) - g(\pi + x) - g(2\pi - x)$
で良さそう。これであとで連結できるはず。

$\underline{0 \leqq x \leqq \pi}$ で関数 $G(x)$ を
なぜ?

$$G(x) = \underline{g(x)} + \underline{g(\pi - x)} - \underline{g(\pi + x)} - \underline{g(2\pi - x)}$$

と定義する。

いま、$g'(x) < 0$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ なので、この範囲で
$g(x)$ は狭義単調減少。よって、$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で

$$\begin{cases} g(x) - g(\pi + x) > 0 \\ g(\pi - x) - g(2\pi - x) > 0 \end{cases}$$ となるので、

$G(x) > 0$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ である。

さらに、$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin x \geqq 0$ なので、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x)\sin x \geqq 0 \quad \cdots ⑤$$

が成り立つ。

あとは(2)と同じ!

この左辺を展開すると、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\sin x\,dx + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\pi - x)\sin x\,dx}_{⑥}$$

$$- \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\pi + x)\sin x\,dx}_{⑦} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(2\pi - x)\sin x\,dx}_{⑧}$$

⑥について $\alpha = \pi - x$ とおくと、

$$⑥ = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} g(\alpha)\sin\alpha\,(-d\alpha) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x)\sin x\,dx$$

⑦について $\beta = \pi + x$ とおくと

$$⑦ = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} g(\beta)(-\sin\beta)\,d\beta = -\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} g(x)\sin x\,dx$$

⑧について $\gamma = 2\pi - x$ とおくと、

$$⑧ = \int_{2\pi}^{\frac{3}{2}\pi} g(\gamma)(-\sin\gamma)(-d\gamma) = -\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} g(x)\sin x\,dx$$

となるので、⑤の左辺は $\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx$ と変形できる。よって

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \geqq 0$$

が示された。

※ $0 \leqq x \leqq \pi$ で $\sin x \geqq 0$ に気付けば、

$G(x) = g(x) - g(\pi + x)$ とおいて

$\int_0^{\pi} G(x)\sin x\,dx \geqq 0$ を示してもOK.

※別解：部分積分して(2)に帰着させる.

$g(x)$ の不定積分を $H(x)$ とおくと.

$$\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx$$

$$= \Big[H(x)\sin x\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} H(x)\cos x\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(-H(x)\big)\cos x\,dx \quad \cdots ☆$$

(2)の形と似てる!

ここで $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき

$$\big(-H(x)\big)'' = -g'(x) > 0$$ なので,

(2)の結論から ☆ $\geqq 0$ が示される。