

名古屋大学 2022 理系第1問/文系第1問

a, b を実数とする。

(1) 整式 x^3 を 2 次式 $(x - a)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) 実数を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ で整式 x^3 を割ったときの余りが $3x + b$ とする。 b の値に応じて、このような $f(x)$ が何個あるかを求めよ。

動画や公式を検索しやすいアプリ okke



- (1) | ①普通に筆算する
 | ②式変形で1次以下の式を作る
 | ③余りをおいて代入
 → なんでも!

<考え方①>

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2ax + a^2 \overline{) \begin{array}{l} x^3 \\ x^3 - 2ax^2 + a^2x \\ \hline 2ax^2 - a^2x \\ 2ax^2 - 4a^2x + 2a^3 \\ \hline 3a^2x - 2a^3 \end{array}} \\
 x + 2a
 \end{array}$$

より余りは $3a^2x - 2a^3$ である。

<考え方②> x^3 は確保

$$x^3 = x(x^2 - 2ax + a^2) + \overbrace{2ax^2 - a^2x}^{\text{残りも9.}}$$

まだ割れる。

$$\begin{aligned}
 &= x(x^2 - 2ax + a^2) \\
 &\quad + 2a(x^2 - 2ax + a^2) - a^2x + \overbrace{4a^2x - 2a^3}^{\text{残りも9}}
 \end{aligned}$$

ここまでは倍数 →

$$= (x + 2a)(x^2 - 2ax + a^2) + \underline{3a^2x - 2a^3}$$

↓
1次式なので
これが余り。

<考え方③> 剰余の定理でよくある手法
 良問1A2B 34/100

$$x^3 = p(x)(x-a)^2 + Ax + B \cdots \textcircled{1} \quad \text{とおく。}$$

$x=a$ を代入して.

$$\underline{a^3 = aA + B \dots (2)} \quad \text{もう1式どう作る?}$$

①の両辺を x で微分して

$$3x^2 = p'(x)(x-a)^2 + 2p(x)(x-a) + A$$

ここに $x=a$ を代入して

$$\underline{3a^2 = A \dots (3)}$$

$$(2)(3) \text{ より } A = 3a^2, B = -2a^3$$

$$\text{よって 余りは } \underline{3a^2x - 2a^3}$$

☆何でもよいので、2通りで解いてみて
べを落ち着かせる (本番で大事)

(2) (1) が使えそう で 使えないので.

まずは 割る しか なさそう.

(詳しい考察は 前回の 初見 動画で)

余りに 関して 恒等式 となり、
式が 2つ 立ちそう. と 見越す.

(1) の 考え方 ①② どちらでも いい

(③ は 厳しい. なせ?) が ここでは ② で

$$\begin{aligned} x^3 &= x(x^2 + \alpha x + \beta) - \alpha x^2 - \beta x \\ &= x(x^2 + \alpha x + \beta) \\ &\quad - \alpha(x^2 + \alpha x + \beta) - \beta x + \alpha^2 x + \alpha\beta \\ &= (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \beta) + \underbrace{(\alpha^2 - \beta)x + \alpha\beta}_{\text{余り}} \end{aligned}$$

より、余りは $(\alpha^2 - \beta)x + \alpha\beta$ となる。

これが 恒等的に $3x + h$ と等しいための
必要十分条件 は.

↑ α, β, h についての

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta = 3 & \dots (4) \\ \alpha\beta = b & \dots (5) \end{cases} \quad \text{である。}$$

☆係数比較
(okedicで確認)

題意と同値な条件。

あとは b によって (α, β) が何コあるか
調べればよさそう。

$(\alpha, \beta) \longleftrightarrow f(x)$ 個数
知りたい

1対1なので!

連立方程式なので一文字消去したい。
→ β がうけに消せそう。

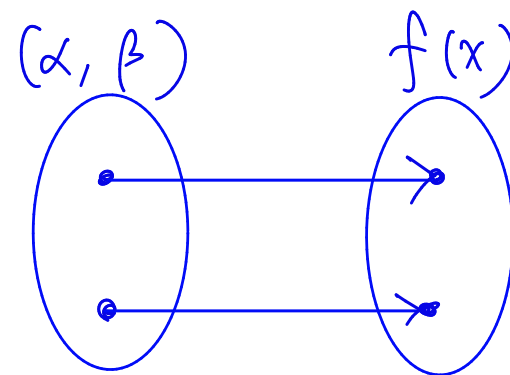
(4)より $\beta = \alpha^2 - 3$ であり、(5)に代入すると、
 $\alpha(\alpha^2 - 3) = b \dots (6)$ を得る。

→ α について実数解の個数を
調べられそうなので、問題を
整理する。

ここで、(6)を満たす異なる実数解 α の
個数を X とすると、(4)'より α 1つに
対して β は1つ定まるので、

(4)かつ(5)を満たす (α, β) の組の
個数は X である。

さらに、 (α, β) の組と $f(x)$ は1対1に
対応するので、 $f(x)$ の個数も X となる。



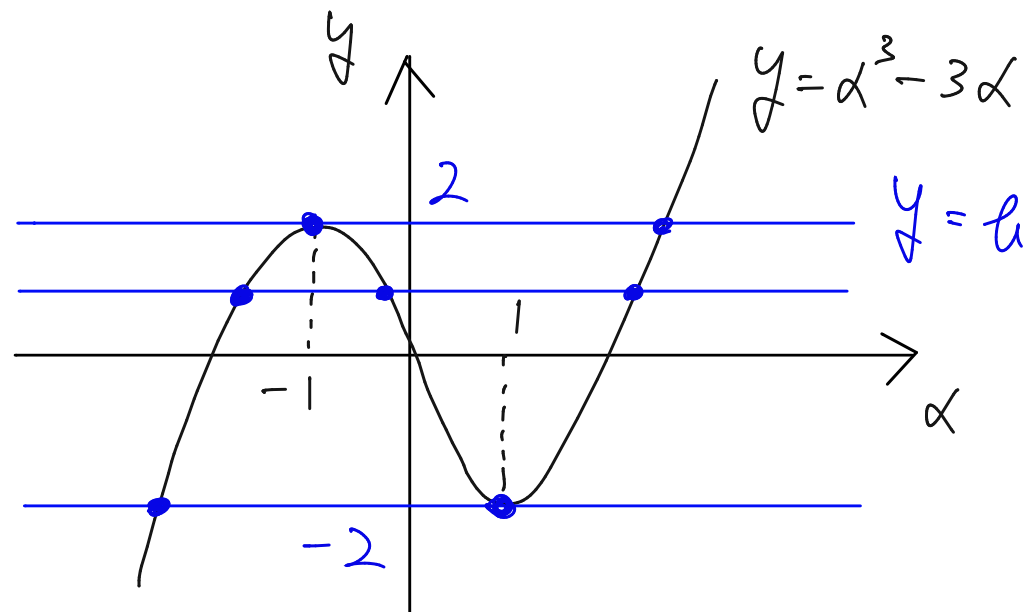
全て対応して
かぶりが無い。
∴ 個数も同じ。

よって、以下 ⑥ を満たす異なる実数解
 α の個数 X を求めればよい。
それは、
整理完了。

$$\begin{cases} y = \alpha^3 - 3\alpha \\ y = t \end{cases} \text{ の共有点の個数に}$$

等しい。(定数分離されてる) $\uparrow$ 処理しやすく

☆ $y = \alpha^3 - 3\alpha$ くらいであれば、
すぐに書いてしまおう。



よってグラフより、 X は

$$\begin{cases} |t| < 2 \text{ のとき } 3 \text{ コ} \\ |t| = 2 \quad \text{ `` } \quad 2 \text{ コ} \\ |t| > 2 \quad \text{ `` } \quad 1 \text{ コ} \end{cases} \text{ となる。}$$

$\uparrow$
絶対値でまとめるとラフ。

