積分・不等式/面積/媒介変数④　面積

数学Ⅲ特講
良問演習

- k を正の実数として、次の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で、2 曲線 $C_1 : y = k\cos x$、$C_2 : y = \sin x$、及び $x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積 S_1 を k を用いて表せ。

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で、2 曲線 C_1, C_2 及び x 軸で囲まれた図形の面積 S_2 が、S_1 と等しくなるような k の値を求めよ。

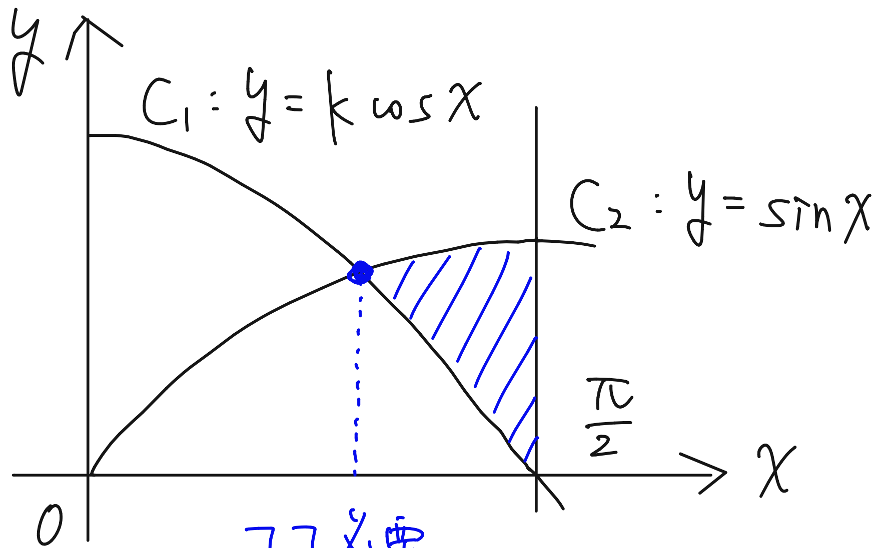
- 曲線 $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解説

(1) 曲線で囲まれた図形の面積

→ 必要なパーツを求めて定積分

グラフを書けるときは書く.



$0 < x < \frac{\pi}{2}$ での $y = k\cos x$ と $y = \sin x$

の交点を調べると,

$$k\cos x = \sin x$$

$\cos x \neq 0$ より 両辺 $\cos x$ で割って

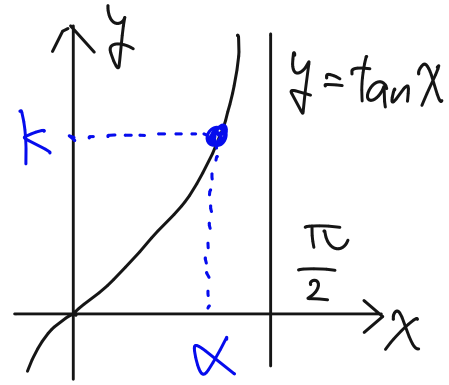
$$\tan x = k$$ → 解けない (高校数学で) けど…

$k > 0$ より, これを満たす x は, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ に ただ1つ存在する。 大事!!

よってその x を α とおくと,

$$\tan\alpha = k \quad \cdots ① \quad となる。$$

$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$



題意の面積 S_1 は ← α使えば計算できる.

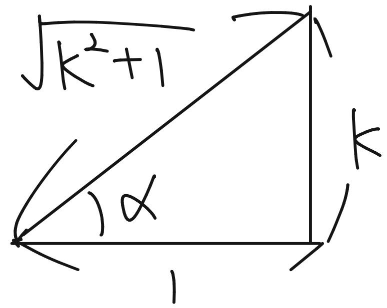
$$S_1 = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - k\cos x)\,dx$$

$$= \Big[-\cos x - k\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -k + \cos\alpha + k\sin\alpha$$ → kの式に持っていく

ここで①より、

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}} \\ \sin\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}} \end{cases}$$



$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より
三角形が早い！

であるので、

$$S_1 = -k + \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} + \frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}$$

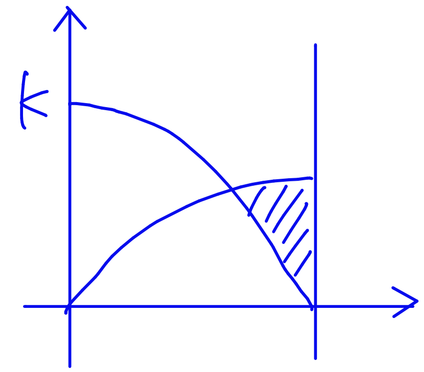
$$= \underline{-k+\sqrt{k^2+1}}$$ を得る。

☆直接値が求まらないときは、とりあえず文字でおいて、過不足なく条件式を立てておく。

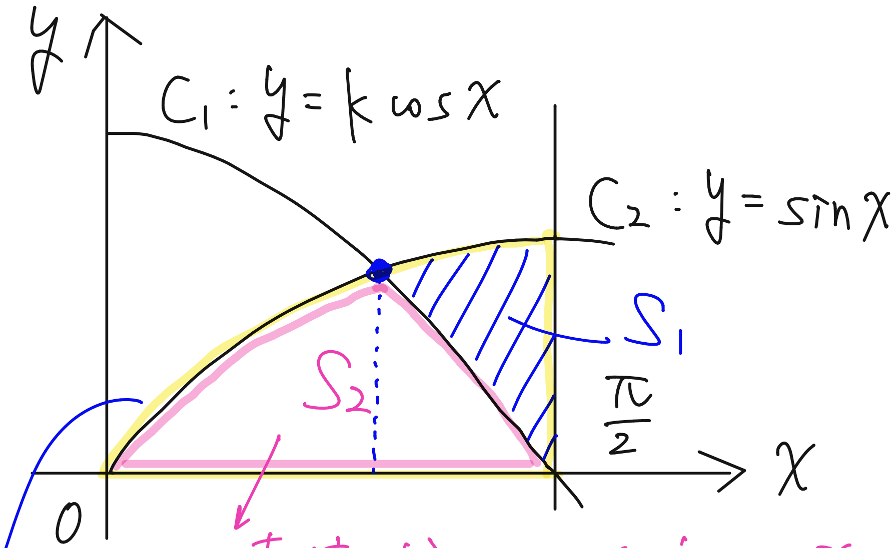
☆答えチェック

$S \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$?

$S \xrightarrow[k\to +0]{} 1$?



(2) 計算しやすい面積を考えて処理を工夫!!



ここ直接求める?? 分割が発生、

α も登場

こっちなら速攻で求まる。

(S_1+S_2)

C_2 と x 軸と $x=\frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積は S_1+S_2 となり、それは

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 1 \quad \text{と求まる。}$$

これが S_1 の2倍となるような k の値を求めればよく、(1) の結果から、

$$-k+\sqrt{k^2+1} = \frac{1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt{k^2+1} = k+\frac{1}{2}$$

$k+\frac{1}{2} \geqq 0$

$$\Longleftrightarrow k^2+1 = \left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \quad (\because k>0)$$
$$\Longleftrightarrow k = \frac{3}{4} \quad \text{を得る。}$$

第2問

得体の知れない図形.

$\rightarrow$ とりあえず y について解いてイメージをつかむ

x でもいいけど
メンドい

$$x^2+xy+y^2-1=0 \quad \leftarrow \text{陰関数}$$
$$y^2+xy+x^2-1=0 \quad \cdots ①$$

x, y は実数で考えているので、
実数存在条件で x の範囲を求めておく.

実数 y が存在する x の条件は

$$D = x^2-4(x^2-1)$$
$$= -3x^2+4 \geqq 0 \quad \text{を解くと}$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{となる。}$$

このもとで、① を解くと

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{-3x^2+4}}{2} \quad \text{となる。}$$

関数 × 2

☆ 面積求めるために何が必要??
実はグラフ書くまでもない。

ここで、2つの関数 $y=\dfrac{-x\pm\sqrt{-3x^2+4}}{2}$ について

→ 大事! yが1つ決まる。

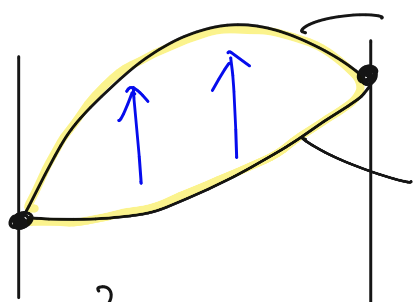
$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ において

$$\frac{-x-\sqrt{-3x^2+4}}{2} < \frac{-x+\sqrt{-3x^2+4}}{2}$$ であり、

$x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ において

$$\frac{-x-\sqrt{-3x^2+4}}{2} = \frac{-x+\sqrt{-3x^2+4}}{2}$$ である。

→ これがわかれば十分



よって求める面積は、

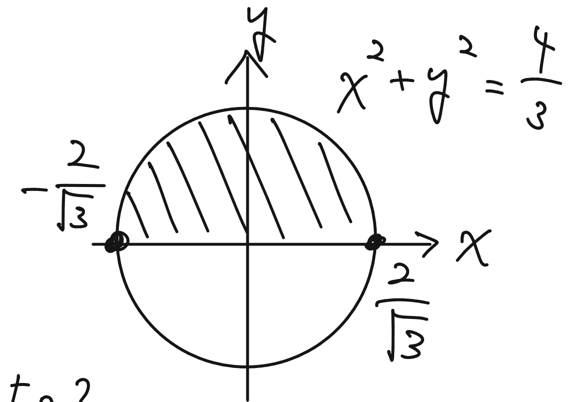
$$\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(\frac{-x+\sqrt{-3x^2+4}}{2}-\frac{-x-\sqrt{-3x^2+4}}{2}\right)dx$$

$$=\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\sqrt{-3x^2+4}\,dx$$

→ 円の面積でラクする。

$$=\sqrt{3}\underbrace{\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\sqrt{-x^2+\frac{4}{3}}\,dx}_{②}\quad\cdots ①$$

ここで②は右の円の斜線部の面積を表し、



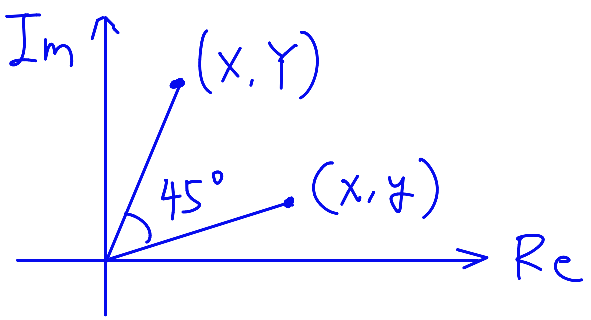
$$\pi\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\pi$$

よって①は $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ となる。

(予習問題の答えはπです)

☆実はこれは45°傾いた楕円を表す。
もとの楕円を復元してみる。

(x, y)を45°回転した点を(X, Y)とすると、



複素数平面上で

$$X+Yi = (x+yi)(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)i$$ より、

相等条件で

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases}$$ を得る。

いま(X, Y)は

$$X^2+XY+Y^2-1=0$$

を満たすので、代入して

$$\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(x-y)(x+y)+\frac{1}{2}(x+y)^2-1=0$$

$$\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=1$$ となる。

↘ 長半軸：$\sqrt{2}$、短半軸：$\sqrt{\frac{2}{3}}$ なので、

面積は $\pi\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ で一致。

(回転では面積不変)