

nに関する確率の一般項の問題

→ $\left\{ \begin{array}{l} \text{直接計算 (東北'19文④, 東北'20理④, 北大'20文③)} \\ \text{確率漸化式 (名大'20理④, 阪大'20文②)} \end{array} \right.$
を見極める!

★ どちらでもいける問題も多い (東北'19理⑥)

設定の理解

文字が多くてつかみにくい + 抽象的.

→ $\left(\begin{array}{l} \text{小さい数で実験してみると良い} \\ \text{日本語で考えて, 数式 } (p(n)) \text{ に戻す} \end{array} \right.$

→ 今回は問題の中で

(1) $p(1)$ は, つまり 1回の試行で n 以上の数 ^{ここはずっとn!} を取り出す確率を表し, それは
 n だけOK. → $\frac{1}{n}$ である。
全事象 → $\frac{1}{n}$ ^{日本語でとらえる.}

確率漸化式は厳しい... → あとで!

$p(n)$ は, n回の試行で はじめて和が
n以上となる確率を表す。← 日本語でとらえる

→ 実験すると, 結構難しいことがわかる

$n=3$. $\square\square \rightarrow \text{out}$

$\square\square \rightarrow \text{OK}$

$n-1$ 回目までは $\square$ しか ク と見えてくる.

そのような取り出し方を考えると.

- $n-1$ 回目までは1の札を取り出し.
- n 回目で1以上の札を取り出す場合のみなので, 確率は

($\sim n-1$ 回目 n 回目)

$$\frac{1^{n-1} \times n}{n^n} = \frac{1}{n^{n-1}}$$

★代入チェック

では, 確率漸化式だと何が難しいか?

そもそも、 n は定数!

a についての推移を考えても、

$$p(a) \xrightarrow{\times} p(a+1)$$

$$1-p(a) \nearrow \text{いろいろなケースがある.}$$

初手で場合分けもパターンが多く、 n を変数化して大変そう。→断念

(2) $p(2)$ は、2回の試行で はじめて和が
 n 以上となる確率を表す。←日本語でとらえる
ここは a に関係ないので、ずうと n !!

→ 実験して、具体化.

1回目		2回目
1	→	$n-1, n$
2	→	$n-2, n-1, n$

1回目と2回目 がどちらも動くので、
片方止めて考える!

1回目の試行で k を取り出すとする。
($1 \leq k \leq n-1$)

このとき、2回の試行で和が n 以上になる
ような2回目の取り出し方は、

$$n-k, n-k+1, \dots, n$$

であり、 $k+1$ 通り。

よって、2回の試行ではじめて和が n 以上
になる取り出し方は、

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{2} \cdot (2+n)(n-1) \text{ 通り}$$

等差数列として計算!
効率化.

となり、求める確率は

$$p(2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot (2+n)(n-1)}{n^2} = \frac{(n+2)(n-1)}{2n^2}$$

★代入キエッ

$n=1$ のとき、 $p(2)=0$
(勝手に変数化)

(3) $p(n-1)$ は、 $n-1$ 回の試行で はじめて和が
 n 以上となる確率を表す。←日本語でとらえる

ここは n に関係ないので、
ずっと n !!

→ 実験して、具体化.

$n-2$ 回目までの数	その和		$n-1$ 回目の数
--------------	-----	--	------------

1, 1, 1, ..., 1	$n-2$	→	2以上
-----------------	-------	---	-----

1, <u>2</u> , 1, ..., 1	$n-1$	→	1以上
-------------------------	-------	---	-----

どこかで2.

↑

☆ $n-3$ 以下は不可能

→ $n-2$ 回目までの和で場合分けすればOK.

$n \geq 3$ で考える。 → $n-2$ を考えるため!

$n-2$ 回目終了時点での和としてあり得るのは、 $n-2$ と $n-1$ のみ。

場合分けして、 $n-1$ 回の試行ではじめて和が
 n 以上となる取り出し方を考える。

(i) $n-2$ 回目終了時点での和が $n-2$ のとき.

- $1 \sim n-2$ 回目の数はずっと1 → (通り)

$n-1$ 回の試行で和が n 以上となるために.

- $n-1$ 回目に取り出す数は2以上 → $n-1$ 通り

よって、場合の数は $1 \times (n-1) = \underline{n-1}$ 通り

(ii) $n-2$ 回目終了時点での和が $n-1$ のとき.

- $1 \sim n-2$ 回目の取り出し方は.

どこか1回2を引いて、他は1を引くパターン。
よって $n-2$ 通り

$n-1$ 回の試行で和が n 以上となるために.

- $n-1$ 回目に取り出す数は1以上 → n 通り

よって、場合の数は $(n-2)n$ 通り

以上 (i)(ii) より、 $n \geq 3$ のとき

$$p(n-1) = \frac{\overbrace{n-1}^{(i)} + \overbrace{(n-2)n}^{(ii)}}{n^{n-1}} \quad \leftarrow n-1 \text{ 回 取り出す}$$

$$= \frac{n^2 - n - 1}{n^{n-1}}$$

ここで、 $n=2$ のときは

$p(1) = \frac{1}{2}$ (1, 2 から 2 を取る) なので、
上の式を満たす。

よって、

$$p(n-1) = \frac{n^2 - n - 1}{n^{n-1}} \quad \text{と求まる。}$$

★代入チェック

$n=3$ で“(2) と一致する？

(勝手に変数化)