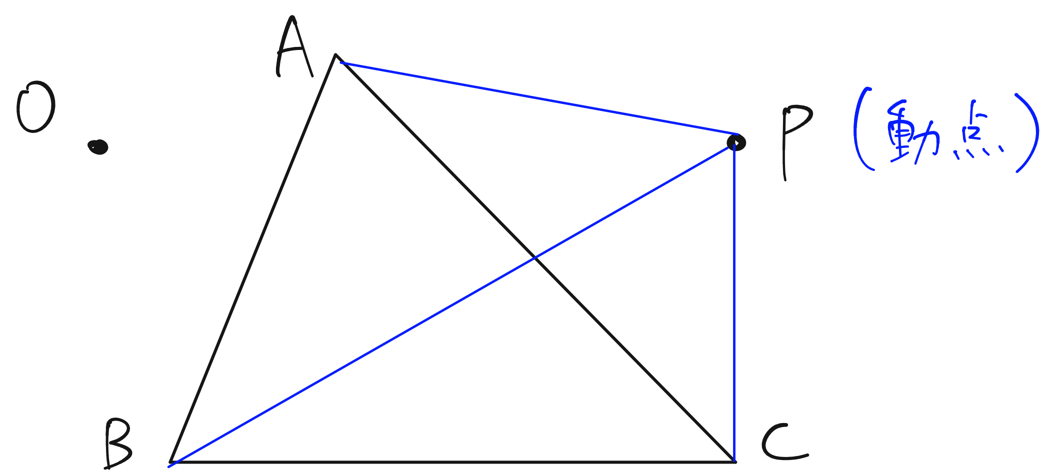


図形, 座標, ベクトル, どれでいくか…?

↳ △ABCの形が与えられてないので厳しそう.

→今回は(1)でベクトル指定されているのでベクトルで。(2)は図形とベクトルどちらもいける。

(1) 等式の証明 → どっちから出発するか.

$$PA^2+PB^2+PC^2$$

ムズい ↑ ↓ いけそう

$$3|x|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$

$PA^2+PB^2+PC^2$ → ベクトルに変える.

$$=|\vec{a}-\vec{x}|^2+|\vec{b}-\vec{x}|^2+|\vec{c}-\vec{x}|^2$$

$$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2$$

$$=3|\vec{x}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$

となり, 題意は示された。□

(2) 何が動くのか? → $\vec{x}$ のみ!!

(1)で示した式が $\vec{x}$ についての2次関数のように見えてくる. → 平方完成

(1)で示した式より

$$L=3\left(\vec{x}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)^2-\frac{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2}{3}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$

変化する.

定数.

よって、Lは

$$\vec{x} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$ のとき最小となり.

これは重心の位置ベクトルを表すので、(okke!)
Lを最小にする点Pは△ABCの重心であることが示された。■

最小値については.

(考え方① ベクトル) ← ゴールはわかっているので、変形あるのみ

$$-\frac{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2}{3} + |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$

$$= -\frac{1}{3}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}\right) + |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2\right)$$

☆ ゴールを見すえて

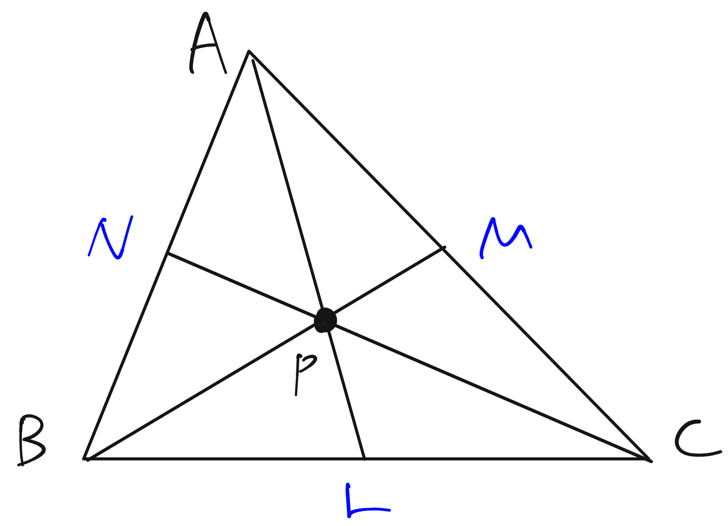
$$= \frac{1}{3}\left(|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{c}|^2+|\vec{c}-\vec{a}|^2\right)$$

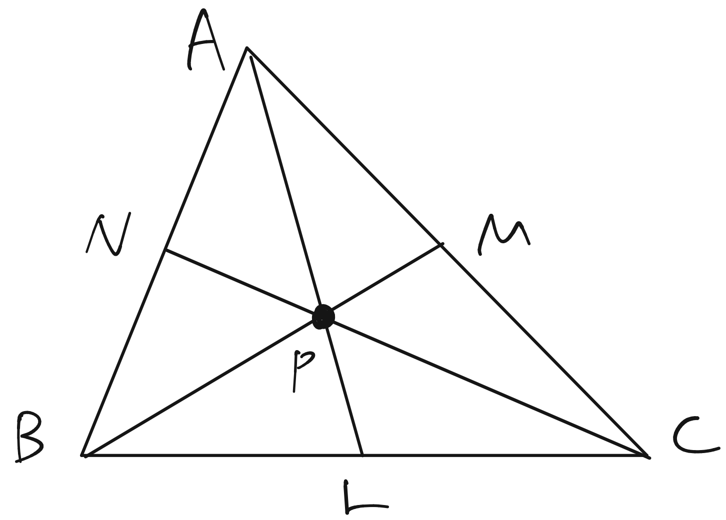
$$= \frac{1}{3}\left(|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$$ となり示された。■

(考え方② 図形で)

Pが△ABCの重心であるとき、PAとBCの交点、PBとACの交点、PCとABの交点をそれぞれL, M, Nとおく。このとき、$PA^2+PB^2+PC^2$の値を求める。





中線定理と、PがALを2:1に内分することから、

重心より $PA=\frac{2}{3}AL$

$$PA^2=\frac{4}{9}AL^2$$

中線定理

$$AB^2+AC^2=2(AL^2+LC^2)$$

$$=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-LC^2\right)$$

Lは中点

$$LC=\frac{1}{2}BC$$

$$=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2\right)$$

同様にして、

$$PB^2=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}BC^2-\frac{1}{4}AC^2\right)$$

$$PC^2=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}BC^2-\frac{1}{4}AB^2\right)$$

これらを全て足して、

$$PA^2+PB^2+PC^2=\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}AB^2+\frac{3}{4}BC^2+\frac{3}{4}CA^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2)$$ となり、

最小値についても題意が示された。