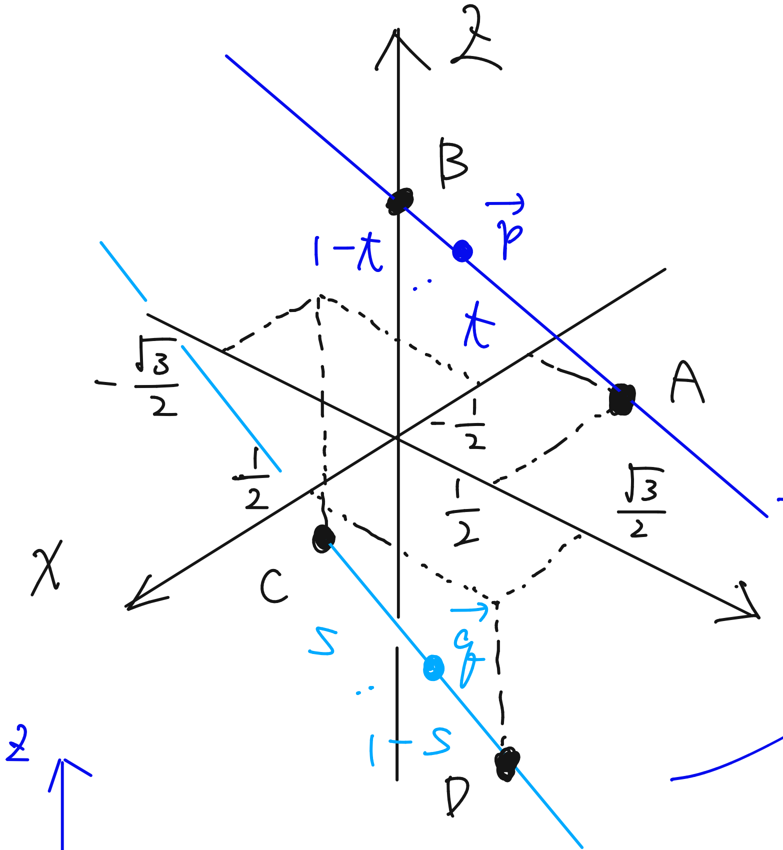
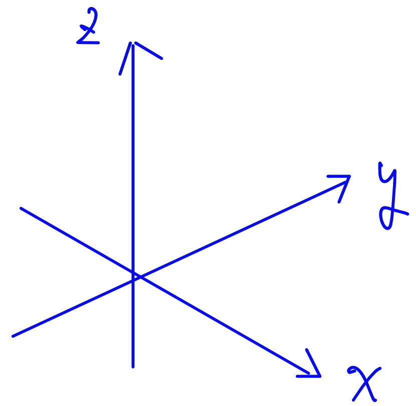
☆ 図を書けるときは書く

→ 今回は図形的な考察はそこまで効果なさそうだけれども，練習に．



この最短距離を求める．



とどっちが見やすいか，その都度判別する．

(1) $\vec{p} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB}$ より，

$$|\vec{p}|^2 = \left|(1-t)\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB}\right|^2$$

$$= (1-t)^2|\overrightarrow{OA}|^2 + 2t(1-t)\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + t^2|\overrightarrow{OB}|^2 \quad \cdots ①$$

ここで，

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$|\overrightarrow{OB}|^2 = 1$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0 \text{ より，}$$

① は $|\vec{p}|^2 = (1-t)^2 + t^2$

$= 2t^2 - 2t + 1$ と表せる。

よって，$|\vec{p}| = \sqrt{2t^2-2t+1}$

同様に $\vec{q} = (1-s)\overrightarrow{OC} + s\,\overrightarrow{OD}$ より，

$$|\vec{q}|^2 = (1-s)^2|\overrightarrow{OC}|^2 + 2s(1-s)\,\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD} + s^2|\overrightarrow{OD}|^2 \quad \cdots ②$$

ここで、

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 = 2$$

$$|\overrightarrow{OD}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 = 2$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 = 0$$ より。

②は $|\vec{q}|^2 = 2(1-s)^2 + 2s^2$

$$= 4s^2 - 4s + 2$$ と表せる。

よって、$|\vec{q}| = \sqrt{4s^2 - 4s + 2}$ //

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \left((1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\right) \cdot \left((1-s)\overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{OD}\right)$$

$$= (1-t)(1-s)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + (1-t)s\,\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$$

$$+ t(1-s)\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + ts\,\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} \quad \cdots ③$$

ここで、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -1$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = -1$$ より。

③は $\vec{p} \cdot \vec{q} = -t(1-s) - ts$

$$= -t$$ //

(2) ベクトルの角度の情報 → 内積で扱う。

$t = \frac{1}{2}$ のとき、$|\vec{p}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\vec{p} \cdot \vec{q} = -\frac{1}{2}$.

ここで、

$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ ← 題意の条件

$\Longleftrightarrow$ $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角の cos が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Longleftrightarrow \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Longleftrightarrow \vec{p} \cdot \vec{q} = -\frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{p}||\vec{q}|$$

$(\because |\vec{p}| \neq 0,\ |\vec{q}| \neq 0)$

$\Longleftrightarrow\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4s^2-4s+2}$

$\Longleftrightarrow\ \sqrt{4s^2-4s+2} = 1$

同値！

$\Longleftrightarrow\ 4s^2-4s+2 = 1$

$\Longleftrightarrow\ (2s-1)^2 = 0$

$\Longleftrightarrow\ s = \frac{1}{2}$

よって、$s=\frac{1}{2}$ が求める条件である。

(3) 2乗して考える！（展開できる）

$|\vec{p}-\vec{q}| \geqq 0$ より、$|\vec{p}-\vec{q}|^2$ が最小のとき

$|\vec{p}-\vec{q}|$ も最小となる。

$|\vec{p}-\vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{q}$

$= 2t^2-2t+1 + 4s^2-4s+2+2t$

$= 2t^2+4s^2-4s+3$

※ 2変数関数の最大最小（独立変数）

→ 1文字固定

→ 2次関数なら平方完成でOK.

$|\vec{p}-\vec{q}|^2 = 2t^2+4\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+2$

よって、$t=0$, $s=\frac{1}{2}$ のとき最小値 2 をとるので、$|\vec{p}-\vec{q}|$ の最小値は $\sqrt{2}$ となる。

☆図形を見て、t, s の妥当性をチェックできる.