

高校数学良問演習 58/100 軌跡と領域②

円 $x^2 + y^2 = 9$ 上を動く点 A と、点 $B(-2, 0)$ 、点 $C(2, 0)$ の

3点を頂点とする三角形の重心 G が描く軌跡を求めよ。

<発展>

上の2つを、順像法と逆像法で解き分けてみましょう。・・・次回

ポイント

軌跡の式：点を例えば (X, Y) とおいたとき、

題意の条件 が成り立つための
 (X, Y) の 必要十分条件 を表した式。

☆ ではどうやって必要十分条件を出していくか？

① 必要条件 (\Rightarrow) で変形を行い、

最後に十分性 (\Leftarrow) を確認

② 同値変形 で変形していく。

必要十分性をキープした式変形。

↑
前回の話
57/100

今日は、この考え方を復習して、

題意の条件の言い換え方・考え方を軽く紹介。

→ 順像法・逆像法

解説

G を (X, Y) とおく。← (X, Y) だとまぎらわしい。

このとき、題意の条件は、

「 (X, Y) が、 $x^2 + y^2 = 9$ 上を動く点 A 、 $(-2, 0)$ 、

$(2, 0)$ が作る三角形の重心となる」となる。

このための 必要十分条件 を (X, Y) で表す。

変形していきたいが、

「 $x^2 + y^2 = 9$ 上を動く点 A」が式にできない。

これを、点 A の座標を (s, t) とおいて、

「 $s^2 + t^2 = 9$ を満たす (s, t) 」と考える。

こうすると、題意の条件は、

「 (x, y) が、 $(s, t), (-2, 0), (2, 0)$ が作る
三角形の重心となる。ただし $s^2 + t^2 = 9$ 」... (★)

この成立のための (x, y) の必要十分条件を考える。

考え方① (必要条件で変形 → 十分性の確認)

$$(★) \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{s - 2 + 2}{3} \\ Y = \frac{t + 0 + 0}{3} \\ s^2 + t^2 = 9 \end{cases}$$

← 重心の座標公式
(足して3で割る)
okedicで!

つまり、
$$\begin{cases} s = 3x \\ t = 3y \\ s^2 + t^2 = 9 \end{cases}$$

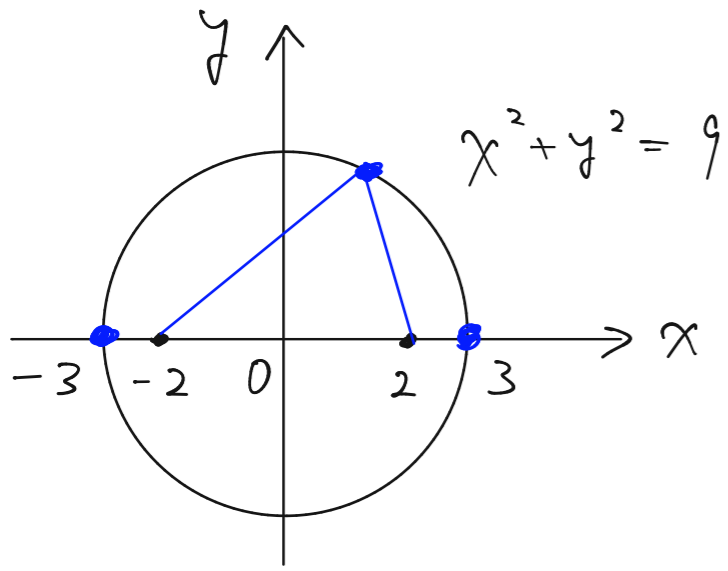
$$\Rightarrow (3x)^2 + (3y)^2 = 9 \quad (\text{代入消去は必要条件})$$
$$\underline{x^2 + y^2 = 1} \quad \text{10/100参照}$$

軌跡の式、ほいのが出た!
でもこれは題意の条件が成り立つための
必要条件!

日本語省略されがち...

「この式が成り立てば (★) は成立するか？」を
考えると、「三角形」だけ怪しい。
(他の式変形は逆も成り立つ)

つまり、 $(s, t), (-2, 0), (2, 0)$ が三角形と
ならないケースを除く必要がある。



それはつまりグラフから.

$(s, t) = (3, 0)(-3, 0)$ のとき.

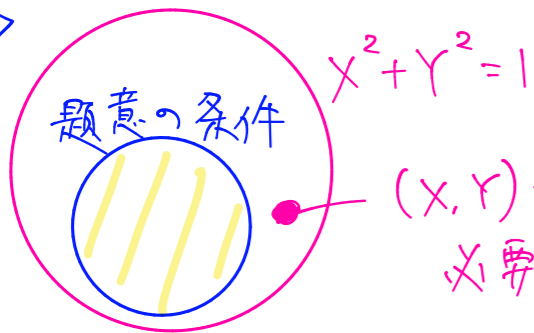
$\Leftrightarrow (x, y) = (1, 0)(-1, 0)$

最後は x, y に戻す.

よって、求める軌跡は

$\odot x^2 + y^2 = 1$ ($(x, y) = (1, 0)(-1, 0)$ を除く)

<イタ-ジ>



$(x, y) = (1, 0)(-1, 0)$ は
必要条件だけど十分条件でない.

考え方② (同値変形をくり返す)

★ 成立のための (x, y) の 必要+分条件 を考えろ.

★ \Leftrightarrow 細心の注意!

$$\begin{cases} X = \frac{s-2+2}{3} \\ Y = \frac{t+0+0}{3} \\ s^2+t^2=9 \\ (s, t) \neq (3, 0)(-3, 0) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{を満たす実数 } (s, t) \\ \text{が存在} \\ \text{しかり書くと} \\ \text{クリアな頭に!} \end{array}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} s=3X \\ t=3Y \\ s^2+t^2=9 \\ (s, t) \neq (3, 0)(-3, 0) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{を満たす実数 } (s, t) \\ \text{が存在.} \end{array}$$

\Leftrightarrow 大事!

$$\begin{cases} (3x)^2 + (3y)^2 = 9 \\ (3x, 3y) \neq (3, 0)(-3, 0) \end{cases}$$

↑ 全て (x, y) の条件!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x, y) \neq (1, 0), (-1, 0) \end{cases} \quad \uparrow \quad (x, y) \text{ の} \\ \text{必要十分条件}$$

よって、求める軌跡は

$x^2 + y^2 = 1$ ($(x, y) = (1, 0), (-1, 0)$ を除く)

発展

題意の条件をどう言い換えるかがとても大事。

→ 順像法・逆像法という2つの見方がある。

導入のため... (本格的には次回の動画で)

<例> $y = x^2 - 2x$ の値域を求めよ。

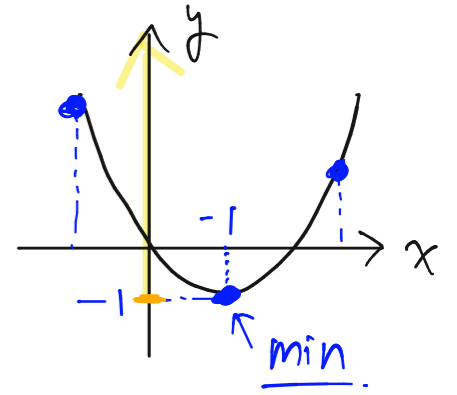
① 順像法による考え方。

$$y = (x-1)^2 - 1$$

→ x を動かして y の範囲を直接考える! (グラフで or 式で) 素朴

$y \geq -1$ とわかる!!

★ x を動かして、 y の条件を直接考える。 ($x \rightarrow y$)



② 逆像法による考え方

求める値域内の値 ε $y = Y$ とおく。 y を1つ決めてみる。

このとき、 $x^2 - 2x = Y$ を満たす 実数 x が存在する。そのための Y の必要十分条件は

$$x^2 - 2x - Y = 0 \quad \text{二次方程式の実数解のはなし!}$$

$$\frac{D}{4} = 1 + Y \geq 0 \Leftrightarrow Y \geq -1$$

よって、値域は $y \geq -1$!!

★ y を決めて、 x が存在する条件を考える。

→ 結果として、 y の条件が出てくる。 ($y \rightarrow x$)

→ 軌跡への応用は次で詳しく!